آموزش حدوپیوستگی

مدرس : امین وحدت

Instagram : aminvahdatp6
Website : aminvahdatp6.ir
Yotube channel : youtube.com/@aminvahdat_p6

بازه های حقیقی : ۱) بازه های کراندار (محدود) ۲) بازه های باز (بیکران)

بازه بسته $[a , b]$

بازه باز (a , b)

نیم باز راست $[a , b)$

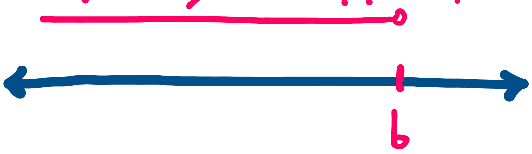
نیم باز چپ $(a , b]$

بازه بیکران از راست $(a , +\infty)$

بازه بیکران راست $[a , +\infty)$

بازه بیکران از چپ $(-\infty , b]$

بازه بیکران از چپ $(-\infty , b)$

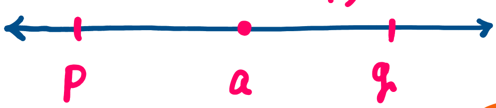


نکته : بازه های بیکران ، همیشه باز هستند .

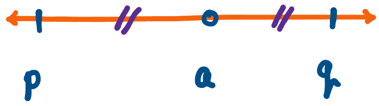
همسایگی ها : بازه ای که شامل a باشد را گوییم همسایگی a و اینگونه نشان می دهیم :

$a \in (p , q)$

$a \in (p , q)$

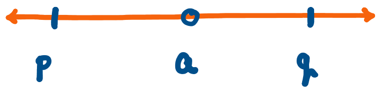


نکته : همسایگی را با بازه های باز نشان می دهیم .



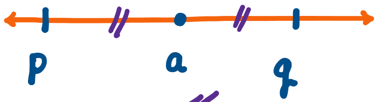
همسایگی محذوف متقارن a

$$\begin{cases}(p,q)-\{a\}\\ |pa| = |aq|\end{cases}$$



همسایگی محذوف a

$(p,q)-\{a\}$

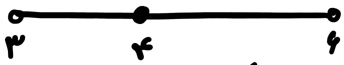


همسایگی متقارن a

$|pa| = |aq|$

مثال:

همسایگی محذوف ۴



همسایگی ۴

همسایگی راست و چپ :

همسایگی چپ x_0

همسایگی راست x_0

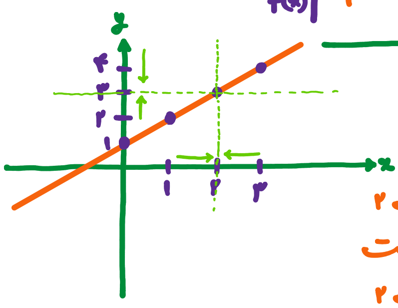
مثال:

همسایگی راست ۲ و همسایگی چپ ۵

مفهوم حد : می توان اینطوری گفت که حد مفهومی است که از آن استفاده می کنیم برای بررسی رفتار یک تابع در همسایگی یک نقطه که مورد نظر ما است .

مثلاً می خواهیم رفتار تابع $f(x) = x+1$ را اطراف $x=2$ بررسی کنیم .

x	۱	۱٫۵	۱٫۷۵	۱٫۹	۲	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۲	۲٫۵	۳
$f(x)$	۲	۲٫۵	۲٫۷۵	۲٫۹	۳	۳٫۰۰۱	۳٫۰۱	۳٫۲	۳٫۵	۴



هرچقدر از سمت راست به ۲ نزدیکتر شویم تابع مقدارش به ۳ میل می کند

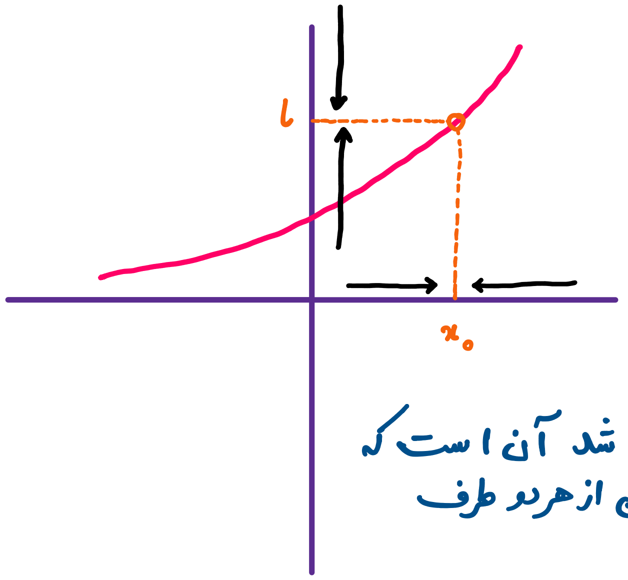
از طرف چپ هم همینطور .

حد تابع وقتی x به سمت ۲ رود از طرف راست $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

حد تابع وقتی x به سمت ۲ می رود از طرف چپ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

شرط حد داشتن تابع :

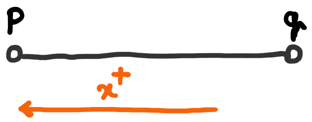


$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

نکته: شرط آنکه تابع f وقتی $x\to x_0$ حد داشته باشد آن است که تابع f در هردو همسایگی x_0 تعریف شده باشد و بتوان از هردو طرف به قدر کافی به x_0 نزدیک شد.

نکته: در نقاط ابتدا و انتهای دامنه حد وجود دارد.

مثال: دامنه تابع f بصورت (p,q) است. تابع f در زمانیکه $x\to p$ حد ندارد. چرا؟

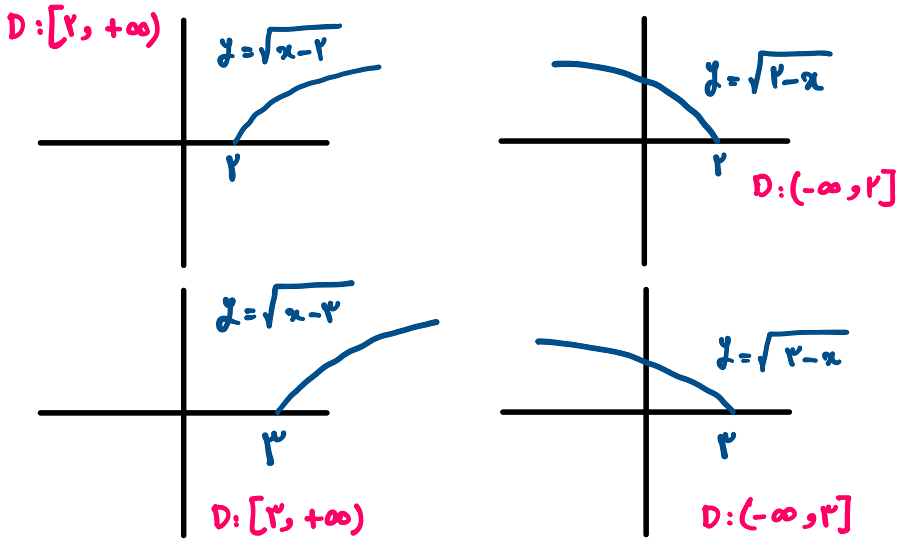


چون همسایگی چپ p وجود ندارد.

به اینگونه حدها می‌گوییم حد یکطرفه. یعنی حد چپ ندارد اما حد راست دارد. ولی در کل حد ندارد

چون شرط حد داشتن:
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

تست: کدام یک از توابع زیر در $x=2$ حد دارد؟



1) $y=\sqrt{x-2}$

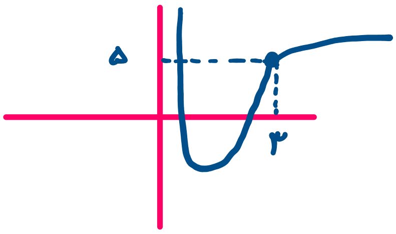
2) $y=\sqrt{2-x}$

3) $y=\sqrt{x-3}$

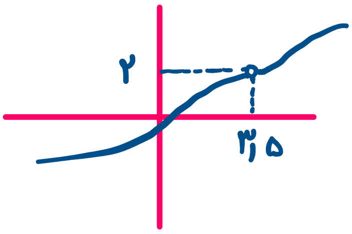
4) $y=\sqrt{3-x}$ ✓

همسایگی چپ و راست $x=2$ در گزینه ۴ رخ می‌دهد.

بررسی حد از روی نمودار تابع :

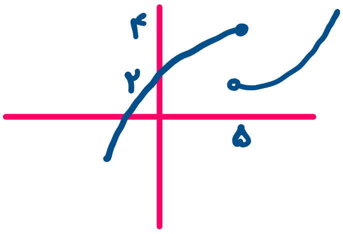


$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=5\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=5\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=5$$



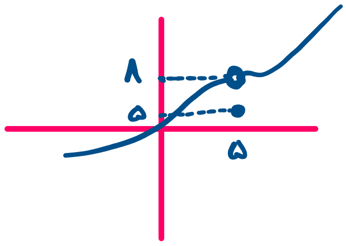
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3.5^+} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 3.5^-} f(x)=2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3.5} f(x)=2$$

$f(3.5)=$ وجود ندارد ← تعریف نشده



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=4\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 5} f(x)=$$ وجود ندارد

$f(5)=4$

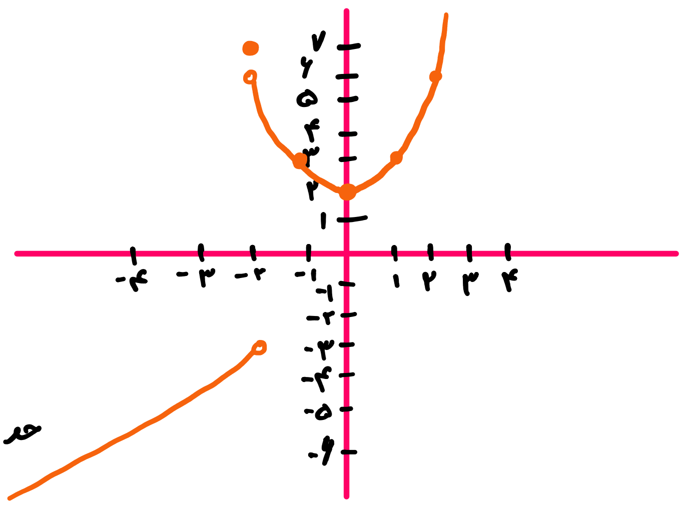


$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=8\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=8\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=8$$

$f(3)=5$

مثال) مقدار حد تابع $f(x)$ را در نقطه $x=-2$ بررسی بکنید .

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>-2\\ 7 & x=-2\\ x-1 & x<-2\end{cases}$$

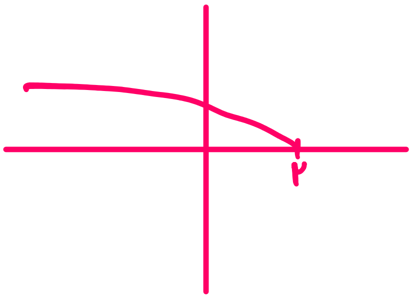


$f(-2)=7$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=6\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-3\end{array}\right\} \rightarrow$$ حد وجود ندارد

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ را در نظر گرفته و درمورد حد آن بررسی کنید.

$D_f: 2-x\geq 0 \rightarrow x\leq 2$ یا $(-\infty, 2]$



$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \text{وجود ندارد} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0 \end{cases}$

طبق دامنه f، تابع در $(-\infty, 2]$ تعریف شده است و نقطه $x=2$ هم نقطه انتها است و حد راست نداریم و فقط حد چپ داریم.

قضایای حد:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ (if: $f(x)=c$ تابع ثابت)

2) $\lim\limits_{x\to a} x = a$

3) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = l_1 + l_2$

4) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) = l_1 l_2$

5) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) / \lim\limits_{x\to a} g(x) = l_1/l_2$ $\quad (\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \neq 0,\ g(x)\neq 0)$

نکته: در قضایای ۳ و ۴ و ۵، شرط تساوی ها آن است که هریک از حدهای $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ وجود داشته باشند.

6) $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$

7) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

8) $\lim\limits_{x\to a} \sin(f(x)) = \sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

9) $\lim\limits_{x\to a} \cos(f(x)) = \cos(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

نکته: درمورد tg و cot باید به دامنه و نقاط حساس توجه کرد.

مثال ها:

1) $\lim_{x\to 3}(3x^2+5x+8) = \lim_{x\to 3}3x^2+\lim_{x\to 3}5x+\lim_{x\to 3}8 = 27+15+8 = 50$

2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x}{3x+5} = \dfrac{1-2}{3+5} = \dfrac{-1}{8}$

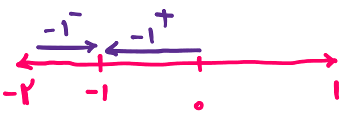
3) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x-[x]}{1-x} = \begin{cases} \lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\dfrac{\frac{1}{2}-[\frac{1}{2}^+]}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}} = 1 \\ \lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{1-[\frac{1}{2}^-]}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$

نکته: $[x]=n \Rightarrow n < x < n+1 \longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} < 1 \rightarrow [\frac{1}{2}] = 0$

4) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x-[x]}{1-x}$ $\begin{cases} \lim_{x\to -1^+}\dfrac{x-[x]}{1-x} = \dfrac{-1-(-1)}{1-(-1)} = 0 \\ \lim_{x\to -1^-}\dfrac{x-[x]}{1-x} = \dfrac{-1-(-2)}{1-(-1)} = 2 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ حد ندارد

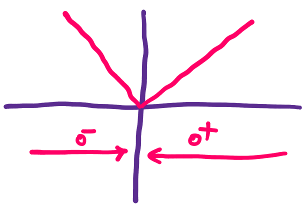
$x\to -1^+ \Rightarrow [-1^+] = -1$

$x\to -1^- \Rightarrow [-1^-] = -2$



5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-|x|}{x-1} = \dfrac{1-0}{0-1} = -1$

$y=|x|$



$\lim_{x\to 0^+}|x| = 0$

$\lim_{x\to 0^-}|x| = 0$

حد توابع مهم : حالت های رایج مبهم ← $\frac{0}{0}$ و $\infty-\infty$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و ....

ما حالت $\frac{0}{0}$ را بررسی می کنیم و نحوه رفع ابهام آنرا. رفع ابهام را به صورت های مختلف مانند استفاده از اتحادها - ضرب و تقسیم یک عامل - ساده کردن - فاکتورگرفتن و ... انجام می دهیم.

مثال ۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$ مبهم → رفع ابهام → $\boxed{x-2}$ عامل ابهام

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}x+2=2+2=4$$

مثال ۲) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|1-x|}{x-1}=\frac{0}{0}$ مبهم → $x\to 1^- \Rightarrow x<1 \to x-1<0$

$\Rightarrow 1-x>0 \Rightarrow |1-x|>0$

$\Rightarrow |1-x|=1-x$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

مثال ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x}}{2x}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x}}{2x}\times\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x\sqrt{5x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{2\sqrt{5x}}$

$=\frac{5}{0}=$ تعریف نشده

مثال ۴) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x-1}{x\cos(\frac{\pi x}{3})}=\frac{-4-1}{-1\times\cos(-\frac{\pi}{3})}=\frac{-5}{-1\times\frac{1}{2}}=\frac{-5}{-\frac{1}{2}}=10$

مثال ۵) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\frac{x}{2})}{x\cos(x/3)}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi\cos(\frac{\pi}{3})}=\frac{1}{\pi\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}$

حد های مثلثاتی که به $\frac{0}{0}$ ختم می‌شوند. برای این مورد چند مهم بیان می کنیم

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$

۳) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

۴) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(kx)}{x} = k$

۵) $\lim\limits_{u\to 0} \cos u = 1 - \frac{u^2}{2}$

۶) $\lim\limits_{u\to 0} \sin u = u$

۷) $\lim\limits_{u\to 0} \tan u = u$

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\tan(3x)\sin(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow[4,2]{\text{استفاده از هم ارزی}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\tan 3x}{x} \times \lim \frac{\sin(\frac{x}{2})}{x}$

$= (3\times 3) \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

استفاده از هم ارزی ۷,۶ (روش ۲) $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\tan 3x \sin(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{3(3x)\times\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\frac{9}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{9}{2}$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(1-\frac{4x^2}{2})}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^2/2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$

۳) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \sin 5x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 2+5 = 7$

۴) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + \tan 2x}{x^2 + 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x + 2x}{x^2 + 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{x(x+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{2}$

قضیه هوپیتال: وقتی به $\frac{0}{0}$ برخورد کردیم، مشتق صورت را جداگانه و مشتق مخرج را هم جداگانه حساب کن و بعد حد بگیر.

مثال) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4$

استفاده از Hop: $\text{Hop} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{1} = \lim_{x\to 2} 2x = 4$ $\quad \begin{cases} (x^2+4)' = 2x \\ (x-2)' = 1 \end{cases}$

مثال) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hop} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0$

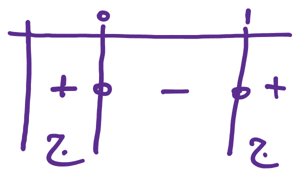
نکته: در توابعی که دارای قدرمطلق و جزء صحیح (براکت) هستند، در حدگیری از آنها باید کمی دقت کرد در این موارد معمولاً باید حد چپ و راست بررسی شوند اما نه در همه موارد.

۱) اعدادی که داخل براکت را صحیح کنند. ۲) بعضی از ریشه های رادیکالی (دامنه مهم است)

۳) ریشه های قدرمطلق ۴) مثلثاتی ها (مخصوصاً cos)

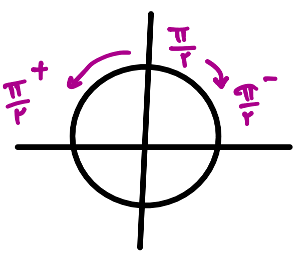
مثال ۱) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2-x}$ $\quad x^2-x \geq 0 \to x(x-1)\geq 0$

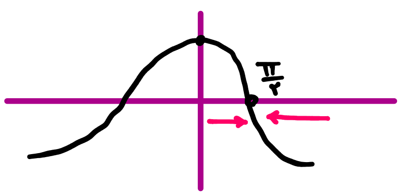
$D_f: (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$



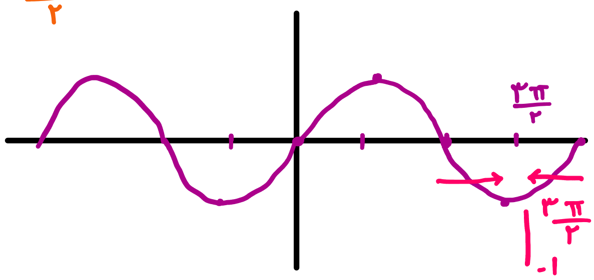
$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x^2-x} = \text{حد ندارد} \\ \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-x} = \sqrt{1^2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-x} = \text{حد ندارد}$

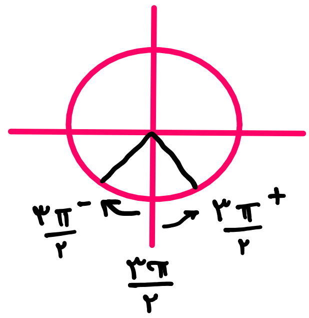
مثال ۲) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x-\pi} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{-\cos\frac{\pi}{2}}{x-\pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi} = 0 \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{x-\pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x-\pi} = 0$





مثال ۳) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} [\sin x] = [(-1)^+] = -1$





$\frac{3\pi}{2}$ داخل براکت را عدد صحیح می‌کند پس باید حد چپ و راست را بررسی کنیم، اما از روی نمودار سینوس تحلیل کردیم که از چپ و راست همواره مقادیر تابع بیشتر از (-1) است پس داخل براکت شد $(-1)^+$ که خروجی آن -1 است $[(-1)^+] = -1$

تمرین

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)[x^3]$

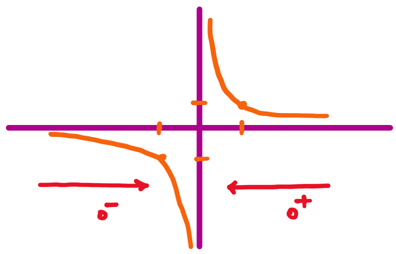
2) $\lim (x^2+2x+3)[|x|]$

3) $\lim\limits_{x\to -\pi} [\sin x]$

4) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x \cos x}{x-\pi}$

حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



x	-1	$-0/01$	$-0/001$	0	$0/001$	$0/01$	$0/1$	1
$f(x)$	-1	-100	-1000	ت.ن	1000	100	10	1

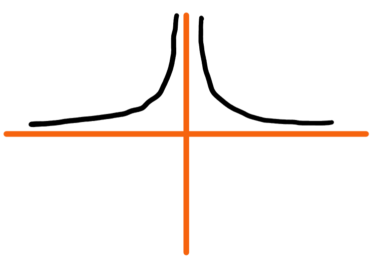
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	ت.ن	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/0001$	0	$0/0001$	$0/001$	$0/1$
$f(x)$	-10	-1000	-10000	ت.ن	10000	100	10

0^- → ← 0^+

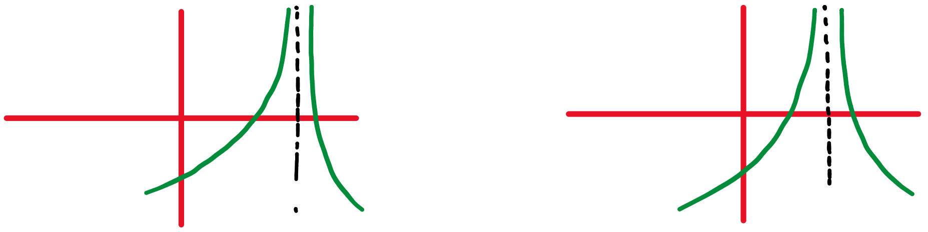
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

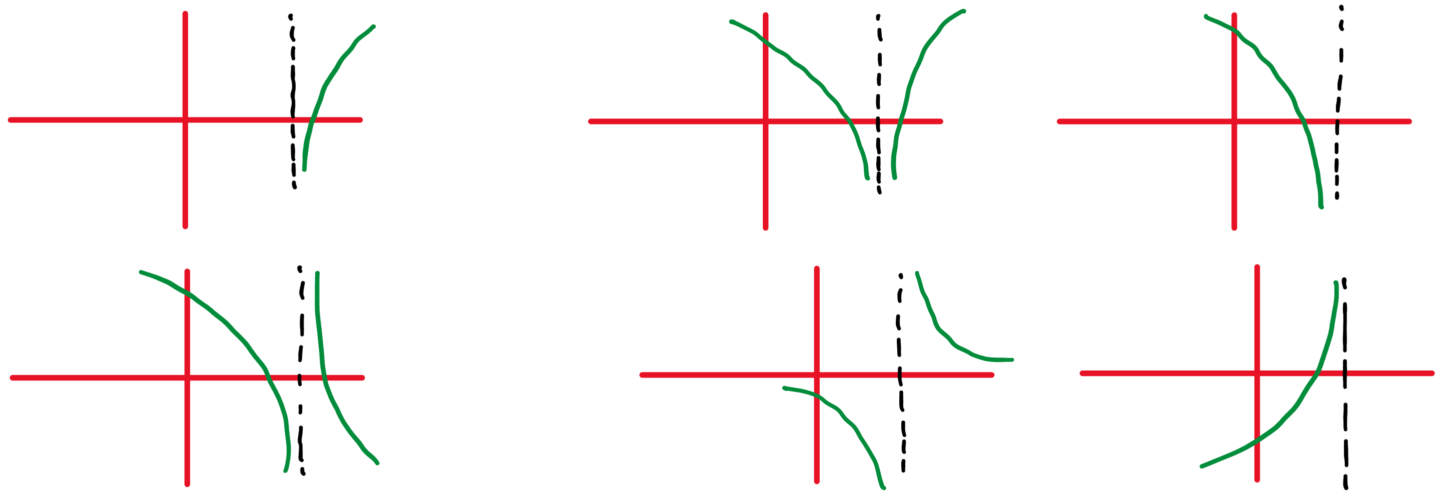
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$$

حالت های مختلف حد بی‌نهایت





مثال) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{1-x^2} = \frac{1-2}{1-(1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ $\qquad x<1 \to x^2<1 \to x^2-1<0 \to 1-x^2>0$

نکته:

$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0 \qquad \text{عدد منفی} \times (-\infty) = +\infty \qquad \text{عدد منفی} \times (+\infty) = -\infty$

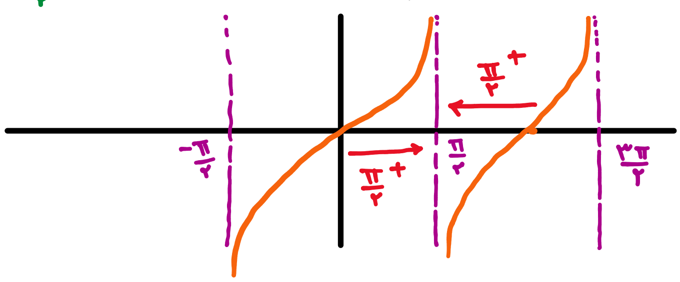
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{1-2}{2^- - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$1<x<2 \to [2^-] = 1$

نکته: اگر مخرج بی‌نهایت شود، کسرما خیلی کوچک می‌شود و مقدار کسر به $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ میل می کند

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{\tan\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{\infty} = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \end{cases}$$



مجانب قائم : خطی است به فرم $x=\beta$ که موازی محور y ها است که تابع به آن نزدیک می شود.

نکته : وقتی جواب حد بینهایت شد، باید (معمولاً) مخرج تعیین علامت کنیم تا علامت ∞ را مشخص کنیم.

۱) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

حداقل باید یکی از این ۶ شرایط رخ دهد تا $x=\beta$ مجانب قائم باشد.

نکته : تابع می تواند بی نهایت مجانب قائم داشته باشد.

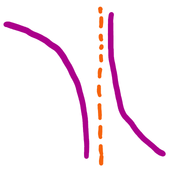
۱) کدامیک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ می باشد؟

$$\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^2-4(-1)+3}{(-1)^2-2(-1)-3}=\frac{8}{0}=\infty \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{8}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{8}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3^2-(4\times 3)+3}{3^2-(2\times 3)-3}=\frac{0}{0}\xrightarrow[\text{ابهام}]{\text{رفع}}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

در $x=3$ بی نهایت رخ نداد پس مجانب قائم نیست.

$x=-1$ مجانب قائم



در نزدیکی $x=-1$ همچین شکلی باید داشته باشد.

۲) مجانب های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود بدست آورید.

$$x^2-x-6=0 \to (x-3)(x+2)=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{3^2-9+2}{3^2-3-6}=\frac{2}{0}=\infty \to \begin{cases} \lim_{x\to3^-}\frac{2}{(x-3)(x+2)}=-\infty \\ \lim_{x\to3^+}\frac{2}{(x-3)(x+2)}=+\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{(-2)^2-(3\times-2)+2}{(-2)^2-(-2)-6}=\frac{12}{0}=\infty \to \begin{cases} \lim_{x\to-2^-}\frac{12}{(x-3)(x+2)}=\frac{12}{-5\times0^-}=+\infty \\ \lim_{x\to-2^+}\frac{12}{(x-3)(x+2)}=\frac{12}{0^+\times-5}=-\infty \end{cases}$$

۳) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ بی نهایت نشده پس مجانب قائم نیست

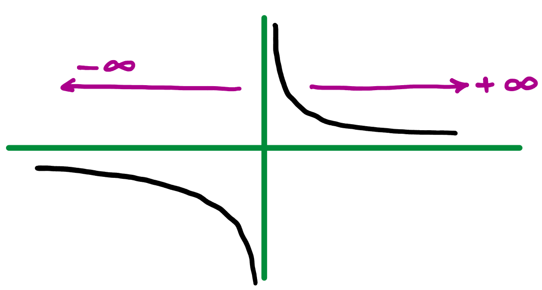
۴) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x}=1\times\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=1\times\infty=\infty$

$x=0$ مجانب قائم است.

حد در بی نهایت: هدف این است که رفتار تابع را وقتی $x\to\infty$ را بررسی کنیم.

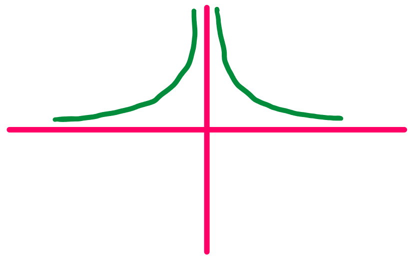
$f(x)=\frac{1}{x}$

1	2	5	10	100	1000
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$



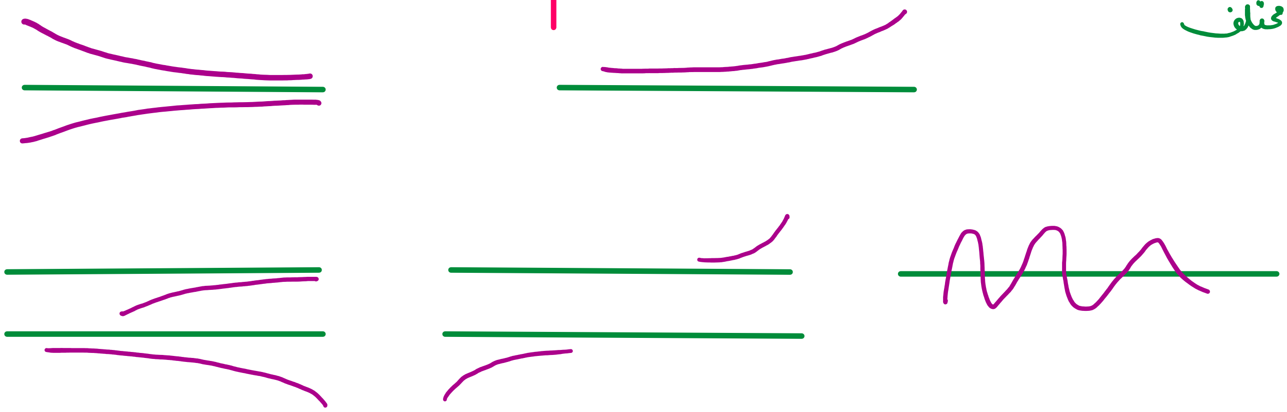
$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0 \end{cases}$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

حالات مختلف



قضایا: اگر $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l_1$ و $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = l_2$:

1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l_1 \pm l_2$ (برای $x \to -\infty$ هم صادق است)

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f . g)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) . \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l_1 l_2$ (برای $x \to -\infty$ هم صادق است)

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$, $\left(l_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \neq 0\right)$

(برای $x \to -\infty$ نیز صادق است)

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^2}+5\right)=\frac{3}{+\infty}+5=0+5=5$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x|x|}{2x^2+5}=\begin{cases} x>0 & \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x(x)}{2x^2+5}=\frac{0}{2x^2+5}=0 \\ x<0 & \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x(-x)}{2x^2+5}=\frac{2x^2}{2x^2+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1 \end{cases}$

استفاده از یک هم‌ارزی مهم: برای حدگرفتن از هر چند جمله‌ای بصورت

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2-3x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1}=+\infty$

نکته: جواب حد در بی‌نهایت میتواند یک عدد باشد یا حتی بی‌نهایت باشد.

قضایا:

1) اگر n فرد باشد $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty\end{cases}$

2) اگر n زوج باشد $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty\end{cases}$

3) $+$ عدد $\times(+\infty)=+\infty$

4) $-$ عدد $\times(+\infty)=-\infty$

5) $-$ عدد $\times(-\infty)=+\infty$

6) $+$ عدد $\times(-\infty)=-\infty$

ex1) $\lim_{x\to}(3-2x-5x^4)=\lim_{x\to+\infty}-5x^4=-5(+\infty)^4=-\infty$

ex2) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-7x+1}{2x^2-x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$

نکته :

۱) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax}{bx^{\beta}}=\dfrac{a}{b}$

۲) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax}{bx^{\beta-1}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)x$

۳) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^{\beta-1}}{bx^{\beta}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)\dfrac{1}{x}$

۳) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+6x^2+9}{x^5+5x^3-10x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5}{x^5}=3$$

۴) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2+\sqrt{x^2-2x}}{5x+10}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{3x+|x|}{5x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\begin{cases} x>0 & \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+(x)}{5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{5x}=\dfrac{4}{5} \\ x<0 & \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+(-x)}{5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

۵) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^3-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^3}=\frac{-1\le\sin x\le 1}{+\infty}=0$$

۶) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{4x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{4}\times\frac{1}{x}=\frac{2}{4}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{2}{4}\times 0=0$$

مجانب افقی : خطی است به فرم $y=\alpha$ که موازی محور x ها می باشد که تابع به آن نزدیک می شود.

نکته : هر تابعی حداکثر دو تا مجانب افقی دارد . اما می تواند بی شمار مجانب قائم داشته باشد .

« برای یافتن مجانب های افقی تابع ، حد تابع را وقتی $x\to\pm\infty$ بررسی می کنیم »

۱) مجانب های قائم و افقی $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ را بیابید .

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \begin{cases} \lim_{x\to -1^-}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{-3}{0^-}=+\infty \\ \lim_{x\to -1^+}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{-3}{0^+}=-\infty \end{cases}$$

مجانب افقی : $y=2$

مجانب قائم : $x=-1$

۲) مجانب افقی $f(x)=\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ را بیابید .

$D_f : \left(\frac{2-x}{2+x}\right)>0$

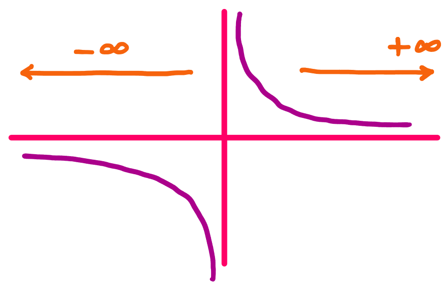
	-2		2	
$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$
		ج		

$D_f : (-2,2)$

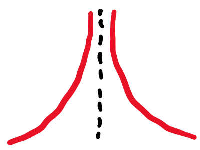
دامنه محدود است و نمیتوان $x\to\infty$ کرد

		-2		2	
$2-x$	$+$		$+$	$\circ$	$-$
$2+x$	$-$		$+$		$+$
	$-$	$\circ$	$+$		$-$
			ج		

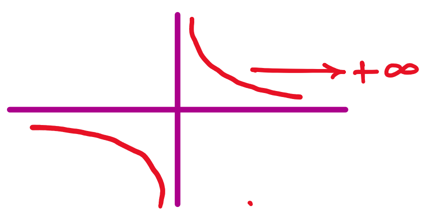
۳) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$



$x=0$ مجانب افقی است .



۴) $\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] \to \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[0^+\right]=0$



از روی نمودار : $\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty} x\times 0=0$

۵) اگر $\lim_{x\to-\infty} \frac{(a-1)x^3+bx^2-1}{3x^2+1} = 2$ باشد. $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ✓
۳) ۶ ۴) ۴

حاصل حد در بی نهایت یک عدد ثابت شده است. پس درجه صورت و مخرج یکسان است.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{bx^2}{3x^2} = \frac{b}{3}$$

و

$$\begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ \frac{b}{3}=2 \Rightarrow b=6 \end{cases} \Rightarrow a+b=6+1=7$$

۶) اگر $\lim_{x\to 0} \frac{\cot ax}{1+\cot 2x} = -2$ آنگاه مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ✓
۳) ۴ ۴) -4

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot ax}{1+\cot 2x} = \frac{\cot 0}{1+\cot 0} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\tan ax}}{1+\frac{1}{\tan 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{ax}}{1+\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{ax}}{\frac{2x+1}{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(ax)(2x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{a(2x+1)} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a} = -2 \Rightarrow a=-1$$

روش ۲) قاعده هوپیتال اینجا هم جواب میدهد:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-a(1+\cot^2 ax)}{-2(1+\cot^2 2x)} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a=-1$$

پیوستگی : پیوستگی در یک تابع زمانی رخ می دهد که : $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

$L^+ = L^- = f(x_0)$ ✓ پیوسته است

$L^- = L^+ \neq f(x_0)$ ✗

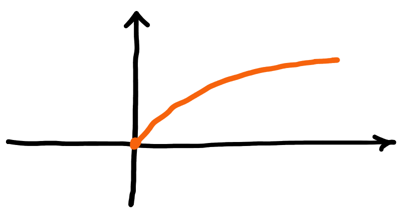
$L^+ \neq L^-$ ✗

$L^+ = f(x_0)$ ✗

$L^+ \neq L^-$ ✗

مثال ۱) پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $x=0$ و $x=1$ بررسی کنید.

$D_f : x \geqslant 0$



$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = \text{وجود ندارد} \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Longrightarrow$$

درنقطه $x=0$ پیوسته نیست

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} = 1 \\ \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x} = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1 \rightsquigarrow$$

در $x=1$ پیوسته است.

نکته : در $x=0$ پیوستگی راست دارد اما پیوستگی چپ ندارد و در کل پیوسته نیست

اما پیوستگی یک سویه دارد.

۲) مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع f در $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2} & x<2\\ a[x]+1 & x\geq 2\end{cases}$$

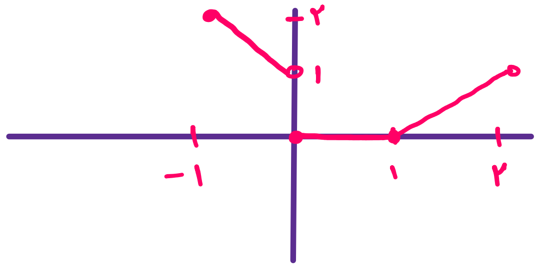
$$\lim_{x\to 2^+} a[x]+1 = a[2^+]+1 = 2a+1$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-2}{1} = 4-2=2$$

$$f(2) = 2a+1 \Rightarrow 2a+1=2 \rightsquigarrow a=\frac{1}{2}$$

۳) تحلیل پیوستگی تابع $f(x)=(x-1)[x]$ در $-1\leq x\leq 2$

$$-1\leq x<0 \longrightarrow [-1] \Rightarrow y=1-x$$
$$0\leq x<1 \longrightarrow [x]=0 \Rightarrow y=0$$
$$1\leq x<2 \longrightarrow [x]=1 \Rightarrow y=x-1$$



پیوستگی: $[-1,2)-\{0\}$ ناپیوستگی: $\{0\}$

۴) اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1\\ [x]+a & x\geq 1\end{cases}$ در $x_0=1$ پیوسته باشد، a را تعیین کنید.

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ✓ ۳) 1 ۴) -1

$$\lim_{x\to 1^+} [x]+a = [1^+]+a = a+1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$f(1)=a+1 \qquad a+1=\frac{1}{2} \rightsquigarrow a=-\frac{1}{2}$$