مثلثات

تعریف زاویه : از دوران یک نیم خط حول مبدأ ، زاویه ایجاد می شود .

دوران پادساعتگرد
دوران درجهت مثبت مثلثاتی

دوران ساعتگرد
دوران درجهت منفی مثلثاتی

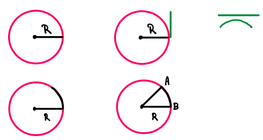
* به چند صورت می توان زوایا را اسم گذاری کرد : $y\hat{o}x$ یا $x\hat{o}y$ یا $\hat{\alpha}$

* برای اندازه گیری زاویه از نقاله استفاده می کنیم .

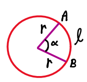
درجه : اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم ، به هریک از این قسمت ها یک درجه (1° یا 1^{deg}) گوییم .

رادیان : برای اندازه گیری زاویه از واحدهای دیگرهم میتوان استفاده کرد . این واحد جدید رادیان نام دارد .

رادیان واحد مسافت برحسب واحد شعاع است . هررادیان برابراست با اندازه کمانی ازدایره که طول آن برابرشعاع دایره است .



* کمانی ازدایره است که طولی برابر شعاع دایره دارد. *

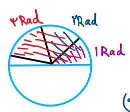


$$\begin{cases} \alpha = 1^{Rad} \\ \widehat{AB} = l = r\alpha^{(Rad)} \end{cases}$$

زاویه مرکزی

$\widehat{AB} = r\alpha \xrightarrow{if:\ \alpha = 2\pi} \widehat{AB} = 2\pi r$ محیط دایره

$$\boxed{Rad = \frac{l}{r}}$$



$P = 2\pi R$ محیط دایره

$P' = \pi R$ محیط نیم دایره

$(\pi \simeq 3{,}14\ Rad)$ و $(2\pi \simeq 6{,}28\ Rad)$

تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر :

محیط دایره : $360^{deg} = 2\pi^{Rad}$

$$\Rightarrow \frac{D}{360} = \frac{\alpha^{Rad}}{2\pi} \quad \text{یا} \quad \frac{D}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

مثال) یک رادیان چند درجه است ؟

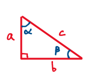
$$\frac{D}{360} = \frac{\alpha}{2\pi} \rightsquigarrow \frac{D}{360} = \frac{1}{2\pi} \rightarrow D \simeq \frac{360}{2\times 3{,}14}$$

$$D \simeq 57^\circ$$

برای هرزاویه ۴ نسبت مثلثاتی اصلی و ۲ نسبت مثلثاتی فرعی تعریف می شود . این نسبت های مثلثاتی را به ۲ روش تعریف می کنیم :

۱) تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه ۲) تعریف نسبت های مثلثاتی در دستگاه مختصات دکارتی

۱) تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه : میدانیم درهرمثلث قائم الزاویه طبق رابطه فیثاغورس : $a^2 + b^2 = c^2$



نسبت های مثلثاتی را اینگونه تعریف می کنیم :

$$\text{سینوس زاویه} = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{وتر}} \qquad \text{کسینوس زاویه} = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{وتر}}$$

$$\text{تانژانت زاویه} = \frac{\text{ضلع مقابل به وتر}}{\text{ضلع مجاور به وتر}} \qquad \text{کتانژانت زاویه} = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{ضلع مقابل به زاویه}}$$

به عنوان مثال نسبت های مثلثاتی زاویه α را می نویسیم :

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cot\alpha = \frac{a}{b}$$

اتحادهای مثلثاتی :

۱) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2+a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

۲) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{bc}{ac} = \frac{b}{a} = \tan\alpha \Rightarrow \boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha}$

۳) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \cot\alpha \Rightarrow \boxed{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha}$

۴) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1 \Longrightarrow \boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \ \text{یا}\ \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}}$

۵) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\div \sin^2\alpha \rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \cot\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$

$\div \cos^2\alpha \rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$

نکته :

۱) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

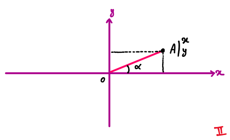
۲) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

۳) $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha}$ ۴) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

۲ نسبت مثلثاتی سکانت و کسکانت زاویه به صورت زیر تعریف می‌شود :

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مختصات دکارتی :



شعاع حامل $OA = r$

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$, $\cot\alpha = \frac{x}{y}$

تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی

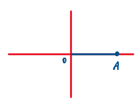
II: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$	I: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\tan\alpha > 0$, $\cot\alpha > 0$
III: $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha > 0$, $\cot\alpha > 0$	IV: $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$

I : α در ناحیه اول است : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

II : α در ناحیه دوم است : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

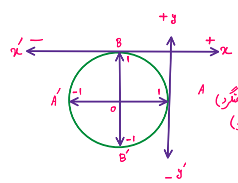
III : α در ناحیه سوم است : $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

IV : α در ناحیه چهارم است : $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



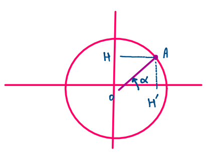
با دوران OA حول O ، نقطه A روی یک دایره حرکت می‌کند. این دایره را دایره مثلثاتی می‌نامیم. شعاع این دایره تأثیری در محاسبات ندارد لذا برای سهولت شعاع دایره مثلثاتی را برابر واحد اختیار می‌کنیم.

دایره مثلثاتی و محورهای مثلثاتی :



جهت + مثلثاتی (پادساعتگرد)

جهت − مثلثاتی (ساعتگرد)

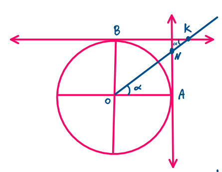


$\sin\alpha = \frac{AH'}{OA}$

$\cos\alpha = \frac{OH'}{OA}$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$



$\tan\alpha = \frac{AN}{OA}$

$\cot\alpha = \frac{BK}{OB}$

$-\infty < \tan\alpha < +\infty$

$-\infty < \cot\alpha < +\infty$

جدول مقادیر مثلثاتی

	۰	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$	$\pi = 180°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$	$2\pi = 360°$
Sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-1	۰
Cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-1	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت.ن ∞	۰	ت.ن ∞	۰
Cot	ت.ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت.ن ∞	۰	ت.ن ∞

نکته :

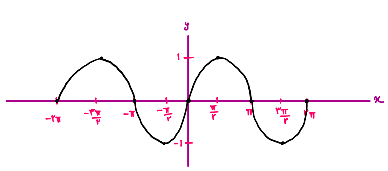
اگر $\alpha + \beta = 90 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$, $\tan\alpha = \cot\beta$

$\cos\alpha = \sin\beta$, $\cot\alpha = \tan\beta$

رسم نمودارهای مثلثاتی :

$y = \sin x$

x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-1	۰



۱ - تابع $y = \sin x$ در ناحیه اول و چهارم صعودی است.

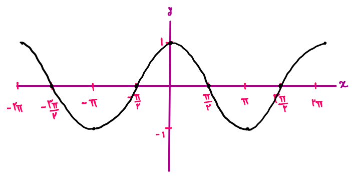
در ناحیه دوم و سوم نزولی است.

$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi \rightarrow \sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$

$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ یا $\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \sin\alpha_1 > \sin\alpha_2$

$y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



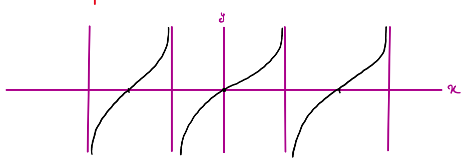
۲ـ تابع $y = \cos x$
- در ناحیه اول و دوم نزولی
- در ناحیه سوم و چهارم صعودی

$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi \longrightarrow \cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$

$\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi \longrightarrow \cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$

$y = \tan x$

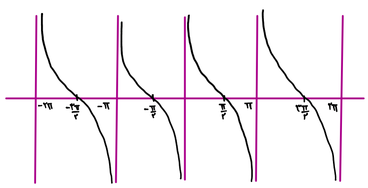
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0



۳ـ تابع $y = \tan x$ ← در بازه های $\left((k+2)\frac{\pi}{2} \text{ و } k\frac{\pi}{2}\right)$ که k عددی فرد است همواره صعودی است .

$y = \cot x$

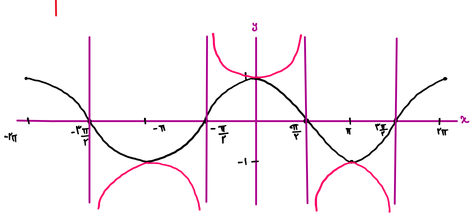
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞



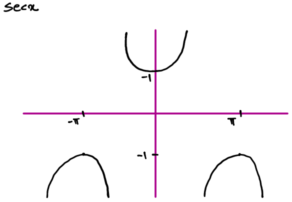
۴ـ تابع $y = \cot x$ ← در بازه های $\left((k+1)\pi \text{ و } k\pi\right)$ که k عددی است صحیح ، همواره نزولی است .

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

x	$-\pi$	0	π
y	-1	1	-1



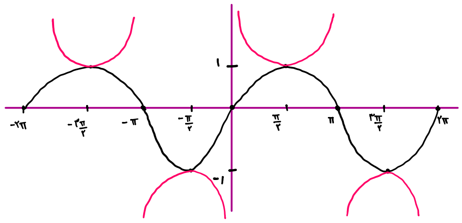
$y = \sec x$

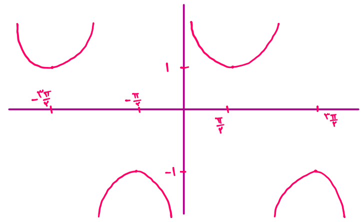


$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
y	1	-1	1	-1

$y = \csc x$





حل مثال

۱) اگر θ مابین ۹۰° و ۱۸۰° و $\cos\theta=-\frac{12}{13}$ باشد، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه θ را بنویسید.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \sin^2\theta=1-(\cos^2\theta)^2 \Rightarrow \sin^2\theta=1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169} \Rightarrow \sin\theta=\pm\frac{5}{13} \xrightarrow[\text{ناحیه II}]{90<\theta<180} \sin\theta=\frac{5}{13}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5/13}{-12/13}=\frac{-5}{12} \quad , \quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{-12}{5}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{12}{13}}=\frac{-13}{12} \quad و \quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{5}{13}}=\frac{13}{5}$$

۲) اگر $\tan 240=\sqrt{3}$ آنگاه نسبت های مثلثاتی $\sin 240$ و $\tan 240$ را بیابید.

$$1+\tan^2 240=\frac{1}{\cos^2 240} \Rightarrow 1+(\sqrt{3})^2=\frac{1}{\cos^2 240} \Longrightarrow 1+3=4=\frac{1}{\cos^2 240} \Rightarrow \cos^2 240=\frac{1}{4}$$

$$\cos 240=\frac{1}{\sqrt{4}} \Rightarrow \cos 240=\pm\frac{1}{2} \xrightarrow[\text{در ناحیه ۳}]{\theta=240^\circ} \cos 240=-\frac{1}{2} \longrightarrow \sin^2 240=1-\cos^2 240 \Rightarrow \sin^2 240=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\sin 240=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

۳) حاصل عبارات زیر را اثبات کنید.

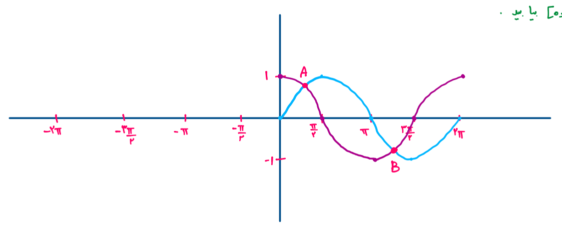
الف) $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{4\tan\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{(1+\sin\alpha)^2-(1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\frac{1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha-1+2\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \xrightarrow{\div\cos\alpha} \frac{\frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos^2\alpha/\cos\alpha}=\frac{4\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

ب) $\frac{\sin^4-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=(1+\tan\alpha)(\tan\alpha-1)$

$$\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{1})}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1^2=(\tan\alpha-1)(\tan\alpha+1)$$

۴) نقاط تقاطع دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ را در بازه $[0,2\pi]$ بیابید.



نقاط تقاطع : A و B

در ناحیه اول : $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

در ناحیه سوم : $\sin\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

محاسبه نسبت های مثلثاتی : $-\alpha$ و $\pi\pm\alpha$ و $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ و $2k\pi\pm\alpha$

ابتدا فرض می کنیم که α کمانی در ناحیه اول باشد. ناحیه قرارگیری کمانهای زیر را تعیین می کنیم.

α : در ناحیه اول
$2k\pi+\alpha$: در ناحیه اول
$-\alpha$: در ناحیه چهارم
$2k\pi-\alpha$: در ناحیه چهارم

$\pi-\alpha$: در ناحیه دوم
$\pi+\alpha$: در ناحیه سوم
$\frac{\pi}{2}-\alpha$: در ناحیه اول
$\frac{\pi}{2}+\alpha$: در ناحیه دوم

برای تعیین این نسبت های مثلثاتی بترتیب زیر عمل می کنیم :

۱) انتهای کمان را مشخص می کنیم که در کدام ناحیه است.

۲) علامت نسبت مثلثاتی را در آن ناحیه مشخص می کنیم.

۳) اگر کمان مورد نظر مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ باشد، $\sin$ به $\cos$ و $\tan$ به $\cot$ و به عکس تبدیل می شوند.

۴) برای $\sin$ و $\cos$ مضارب 2π را حذف می کنیم. یعنی مضارب زوج π تأثیری در نسبت های مثلثاتی ندارد.

۵) برای $\tan$ و $\cot$ مضارب π را حذف می کنیم.

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

$\sin(2k\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(2k\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cot(2k\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

حل مثال :

1) $\tan(130)=\tan(180-50)=\tan(-50)=-\tan 50$

2) $\tan(230)=\tan(180+50)=\tan 50$

3) $\tan(140)=\tan(90+50)=\tan 50$

4) $3\tan(130)+\cot(40)-\tan(230)-5\tan(310)-2\cot(140)=?$

$3\tan(180-50)+\cot(90-50)-\tan(180+50)-5\tan(360-50)-\cot(90+50)$

$-3\tan(50)+\tan(50)-\tan(50)+5\tan(50)+2\tan(50)=4\tan(50)$

5) (سراسری-۷۷) $\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{13\pi}{14}=?$

$\cos(\pi-\frac{13\pi}{14})+\cos(\pi-\frac{9\pi}{14})+\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{9\pi}{14})+\cos(\frac{13\pi}{14})=-\cos\frac{13\pi}{14}+\cos\frac{13\pi}{14}-\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2}=0$

6) $B=\dfrac{2\sin(7\pi+\alpha)-3\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\cos(8\pi-\alpha)+5\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$, $\tan\alpha=2$

$$=\frac{-2\sin\alpha-3\cos(-\alpha)}{\cos\alpha+5\sin\alpha}=\frac{-2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha+5\sin\alpha}\xrightarrow{\div\cos}\frac{-2\tan\alpha+3}{1+5\tan\alpha}=\frac{-2(2)+3}{1+5(2)}=\frac{-1}{11}$$

محاسبه نسبت های مثلثاتی : $\alpha\pm\beta$, 2α , 3α

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

7) $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha+\cot\beta}$

8) $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

مثال۱) اگر $\tan(a-b)=x$ و $\tan(a+b)=y$ ، $\tan 2a$ کدام است ؟ (آزاد ریاضی-۶۹)

۱) $\dfrac{1-xy}{x+y}$ ۲) $\dfrac{x+y}{1-xy}$ ✓

۳) $\dfrac{x+y}{1+xy}$ ۴) $\dfrac{x-y}{1+xy}$

$2a=a+a\xrightarrow{+b-b}2a=(a+b)+(a-b)\rightarrow\tan(2a)=\tan(\underbrace{a+b}_{\alpha})+\tan(\underbrace{a-b}_{\beta})$

$\tan(2a)=\tan[(a+b)+(a-b)]=\dfrac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\tan(a-b)}=\dfrac{y+x}{1-yx}$

مثال۲) حاصل عبارت زیر کدام است؟ (سراسری-۷۲)

$A=\dfrac{1}{2\sin a}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

۱) $\sin a$ ۲) $\cos a$

۳) $\sin b$ ۴) $\cos b$ ✓

$A=\dfrac{1}{2\sin a}(\sin a\cos b+\sin b\cos a+\sin a\cos b-\sin b\cos a)$

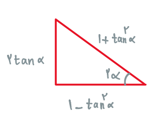
$=\dfrac{1}{2\sin a}(2\sin a\cos b)=\cos b$

محاسبه نسبت های مثلثاتی 2α :

1) $\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\longrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$

2) $\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

3) $\tan(2\alpha)=\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$



$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\cos(2\alpha)=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\sin(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\cot(2\alpha)=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$

مثال)
موارد زیر را اثبات کنید . (روابط زیر به روابط نصف کمان معروف هستند)

1) $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha\longrightarrow\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\xrightarrow{\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha}(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\longrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$

2) $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1\longrightarrow\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\xrightarrow{\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha}\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1\longrightarrow\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$

3) $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}\longrightarrow\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)}=\dfrac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$

4) $\cot^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}\longrightarrow\cot^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)}{\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)}=\dfrac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$

حل مثال)

۱) اگر $a+b=\frac{\pi}{4}$ باشد حاصل $8\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos(\frac{\pi}{2}-b)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

۱) $\sin 4a$ ۲) $\cos 4a$ ✓ ۳) $\sin^2 2a$ ۴) $\cos^2 2a$

$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2}-a)=\sin a\\ \cos(\frac{\pi}{2}-b)=\sin b\end{cases}$$

$$8\cos a\cos b\sin a\sin b \Rightarrow 2(2\sin a\cos b)(2\sin b\cos b)$$

$$=2\sin 2a\sin 2b \ * \longrightarrow 2\sin 2a\sin(\frac{\pi}{2}-2a)=2\sin 2a\cos 2a=\cos 4a$$

$$* \ a+b=\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2a+2b=\frac{\pi}{2}\longrightarrow 2b=\frac{\pi}{2}-2a$$

۲) اگر $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin\alpha+\cos\alpha$ کدام است؟

$$\sin\alpha+\cos\alpha=k$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=k^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin 2\alpha=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow k=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

محاسبه نسبت های مثلثاتی 3α :

$$1)\ \sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha \xrightarrow[\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha]{\sin 2\alpha=2\sin\cos\alpha} 2\cos^2\alpha\sin\alpha+\sin\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$2\cos^2\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha\longrightarrow 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha\longrightarrow 2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-\sin^3\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$2)\ \cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\alpha-(2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha=\cos^3\alpha-\cos\alpha\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$=\cos^3\alpha-\cos(1-\cos^2\alpha)-2\cos(1-\cos^2\alpha)=\cos^3\alpha-\cos\alpha+\cos^3\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

* تمرین: نسبت های مثلثاتی $\tan 3\alpha$ و $\cot 3\alpha$ را بیابید. *

مثال۱) اگر $\sin 3x=\frac{1}{3}$ باشد حاصل عبارت $(8\sin^3x-6\sin x)^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) 1 ۳) $\frac{4}{9}$ ✓ ۴) 0

$$\left(-2(3\sin x-4\sin^3x)\right)^2=(-2\sin 3x)^2=4\times\sin^2 3x=4\times(\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$$

مثال۲) حاصل عبارت $\frac{\sin x\cos 3x}{\sin 2x}-\cos 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\frac{1}{2}$

$$\frac{\sin x(4\cos^3x-3\cos x)}{2\sin x\cos x}-(2\cos^2x-1)=\frac{\sin x\cos x(4\cos^2x-3)}{2\sin x\cos x}-(2\cos^2x-1)=\frac{4\cos^2x-3}{2}-2\cos^2x-1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2x-\frac{3}{2}-2\cos^2x+1=\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

توجه کنید!

$$1)\ \tan\alpha+\cot\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

اثبات : $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$

$$2)\ \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$(\sin^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha)^2+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$3)\ \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=(\underbrace{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}_{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$$

$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$4)\ \sec^2\alpha+\csc^2\alpha=\sec^2\alpha\cdot\csc^2\alpha$$

$$= 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

4) $\sec^2\alpha + \csc^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \csc^2\alpha$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha \cdot \csc^2\alpha$$

5) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$$

نکته: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ ، $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$

* تمرین: اثبات کنید * $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

مثال)

۱) عبارت زیر را برحسب $\tan\alpha$ بنویسید. $A = \sec^6\alpha - 3\sin^2\alpha\sec^4\alpha$

$$A = \sec^4\alpha\,(\sec^2\alpha - 3\sin^2\alpha) = (\sec^2\alpha)^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 3(1 - \cos^2\alpha)\right)$$

$$A = (1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha - 3 + 3\cos^2\alpha) = (1+\tan^2\alpha)\left(\tan^2\alpha - 2 + \frac{3}{1+\tan^2\alpha}\right)$$

$$A = (1+\tan^2\alpha)\left[\tan^2\alpha(1+\tan^2\alpha) - 2(1+\tan^2\alpha) + 3\right] =$$

$$A = (1+\tan^2\alpha)\left[\tan^2\alpha + \tan^4\alpha - 2 - 2\tan^2\alpha + 3\right]$$

$$A = (1+\tan^2\alpha)\left[\tan^4\alpha - \tan^2\alpha + 1\right] = \tan^4\alpha - \tan^2\alpha + 1 + \tan^6\alpha - \tan^4\alpha - \tan^2\alpha$$

$$A = \tan^6\alpha - 2\tan^2\alpha + 1$$

۲) از رابطه مقابل $\cos\alpha$ را محاسبه کنید. $3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 5$

$$3\left(\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right) + 4\cos\alpha = 5 \rightarrow 3\left(\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right) = 5 - 4\cos\alpha$$

$$9(1-\cos^2\alpha) = (5 - 4\cos\alpha)^2 \Rightarrow 9 - 9\cos^2\alpha = 25 - 40\cos\alpha + 16\cos^2\alpha$$

$$25\cos^2\alpha - 40\cos\alpha + 16 = (5\cos\alpha - 4)^2 = 0 \Rightarrow 5\cos\alpha = 4 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

۳) حاصل عبارت مقابل را بدست آورید. $\cot^2(15^\circ) - \tan^2(15^\circ) = ?$

$$\cot^2\alpha - \tan^2\alpha = (\cot\alpha - \tan\alpha)(\cot\alpha + \tan\alpha) = 2\cot 2\alpha \times \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \times \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} \xrightarrow{\alpha = 15^\circ} \frac{4\cos(30^\circ)}{\sin^2(30^\circ)} = \frac{4\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = 8\sqrt{3} \simeq 8 \times 1.7 \simeq 13.6$$

معادلات مثلثاتی: I معادلات ساده II معادلات کلاسیک

I: در این نوع، معادلات پس از عملیات مقدماتی به یکی از چهار حالت زیر در می‌آید:

1) $\sin x = a$ 2) $\cos x = a$

3) $\tan x = a$ 4) $\cot x = a$

فرم ۱

الف: اگر $a > 1$ یا $a < -1$ باشد معادله جواب ندارد چون $-1 \le \sin x \le 1$ است.

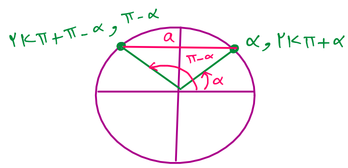
ب) اگر $-1 < a < 1$ باشد فرض می‌کنیم a عدد حقیقی و سینوس کمان α باشد.

الف: اگر $a>1$ یا $a<-1$ باشد معادله جواب ندارد چون $-1 \le \sin x \le 1$ است.

ب) اگر $-1 \le a \le 1$ باشد فرض می‌کنیم a عدد حقیقی و سینوس کمان α باشد.

$$\sin x = \sin\alpha = a \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

جوابهای کلی معادله



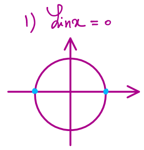
برای مشخص کردن کمان α، از نقطه ای به فاصله a از مرکز روی محور سینوس ها خطی به موازات محور کسینوس ها رسم می کنیم که دایره مثلثاتی را در دو نقطه قطع می کند. این نقاط انتهای کمانهای مورد نظر می باشند.

$\sin x = a = \sin\alpha$

نکته: $\begin{cases} \sin(2k\pi+\alpha) = \sin\alpha \\ \sin(2k\pi+\pi-\alpha) = \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \end{cases}$

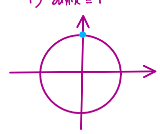
حالات خاص:

1) $\sin x = 0$



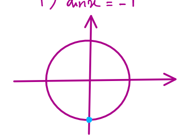
$x = k\pi$ یا $x = (2k)\frac{\pi}{2}$

2) $\sin x = 1$



$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

3) $\sin x = -1$



$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

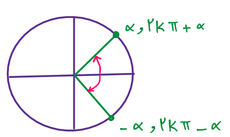
* اگر $\cos x = \pm 1$ باشد معادله دارای ریشه مضاعف است.

فرم ۲

الف) اگر $a>1$ یا $a<-1$ باشد آنگاه معادله جواب ندارد. $\cos x = a$

ب) اگر $-1 \le a \le 1$ باشد فرض می کنیم a کسینوس کمان α باشد:

برای مشخص کردن انتهای کمان، از نقطه به فاصله a تا مرکز دایره خطی به موازات محور سینوسها رسم می نمائیم دایره را در ۲ نقطه قطع میکند. این نقاط انتهای کمانهای مورد نظر میباشند.

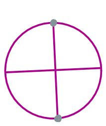


$\cos x = a = \cos\alpha$

$\begin{cases} \cos x = \cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm\alpha) = \cos\alpha = a \\ x = 2k\pi \pm \alpha \end{cases}$ جوابهای کلی معادله

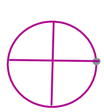
حالات خاص:

1) $\cos x = 0$



$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

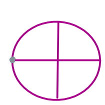
2) $\cos x = 1$



$x = 2k\pi$

مضارب زوج π

3) $\cos x = -1$



$x = (2k+1)\pi$

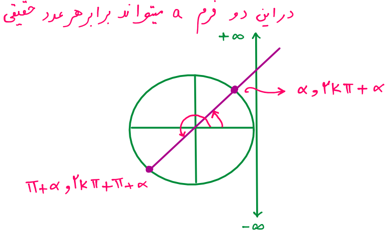
مضارب فرد π

* اگر $\cos x = \pm 1$ باشد معادله دارای ریشه مضاعف است.

فرم ۳ و ۴

در این دو فرم a میتواند برابر هر عدد حقیقی دلخواهی باشد و لذا معادله در هر حالت دارای جواب است:

$$\begin{cases} \tan x = a = \tan\alpha \\ \cot x = a = \cot\alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$ جواب کلی معادله



* فرم ۳ و ۴ حالت خاص ندارد *

حل مثال)

۱) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin^2 x - 1 = 0$ ب) $2\cos^2 x - 1 = 0$ ج) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ د) $\tan(2x-1) = 0$ ت) $-\cot(\frac{\pi}{2}+x) = \tan(\pi - x)$

الف) $2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

ب) $2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4}) \rightarrow x = 2k\pi \pm (\pi - \frac{\pi}{4}) = (2k \pm 1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

ج) $2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$$\cos x = 0 = \cos(\frac{\pi}{2}) \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

د) $\tan(2x-1) = 0 = \tan(0) \Rightarrow 2x - 1 = k\pi + 0 \rightarrow x = \frac{k\pi + 1}{2} = \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}$

ت) $\begin{cases} \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\tan\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases}$

$$-\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \tan(\pi-\alpha) \rightarrow \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = +\tan\alpha = \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\tan\alpha = -\tan\alpha \Rightarrow 2\tan\alpha = 0 \rightarrow \tan\alpha = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

نامساوی های مهم مثلثاتی

۱) $-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1$

۲) $-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1$

۳) $0 < x < \frac{\pi}{4}$: $\sin x < \cos x$ ، $\tan x < \cot x$

۴) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$: $\sin x > \cos x$ ، $\tan x > \cot x$

مثال) حاصل عبارت $\frac{|\sin x - \cos x|}{\ } + \frac{\sin x + \cos x}{\ }$ که در آن $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

مثال) حاصل عبارت $\frac{\sin x+\cos x}{2}+\frac{|\sin x-\cos x|}{2}$ که در آن $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ✓ ۳) $\sin x+\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$

$$0\le x\le \frac{\pi}{4} \longrightarrow \sin x<\cos x \; : \; \sin x-\cos x<0 \Rightarrow |\sin x-\cos x|=\cos x-\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x-\sin x}{2}+\frac{\sin x+\cos x}{2}=\frac{2\cos x-0}{2}=\cos x$$

تبدیل مجموع یا تفاضل نسبت ها به ضرب

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

5) $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

6) $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

7) $\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

8) $\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

تبدیل حاصلضرب نسبت ها به مجموع یا تفاضل

1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

2) $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

3) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

4) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

حل مثال)

۱) حاصلضرب عبارت $\sec^2 2x(\cos 5x+\cos 3x+2\cos x)$ برابر کدام است؟

۱) $4\sec x$ ۲) $4\cos x$ ✓ ۳) $4\cos 2x$ ۴) $4\cos^2 x$

$$\sec^2 2x(\cos 5x+\cos 3x+2\cos x)=\frac{1}{\cos^2 2x}\left[(\cos 5x+\cos x)+(\cos 3x+\cos x)\right]$$

$$=\frac{1}{\cos^2 2x}[2\cos 3x\cos 2x+2\cos 2x\cos x]=\frac{2}{\cos^2 2x}\times\cos 2x[\cos 3x+\cos x]=\frac{2}{\cos 2x}[2\cos 2x\cos x]$$

$$=4\cos x$$

۲) حاصل عبارت $\frac{\sin 10x-\sin 4x}{\cos 10x+\cos 4x}$ کدام است؟

۱) $\tan 3x$ ✓ ۲) $\cot 4x$

۳) $\cot 3x$ ۴) $\tan 4x$

$$\frac{2\sin\frac{10x-4x}{2}\cdot\cos\frac{10x+4x}{2}}{2\cos\frac{10x+4x}{2}\cdot\cos\frac{10x-4x}{2}}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\tan 3x$$

۳) نشان دهید: $A=\sin 140+\sin 40-2\cos 50=0$

$$A=2\sin\left(\frac{140+40}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{140-40}{2}\right)-2\cos 50=2\cancel{\sin 90}^{\,1}\cos 50-2\cos 50=0$$

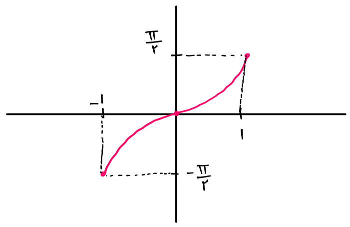
۴) حاصل عبارت $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$ را بیابید.

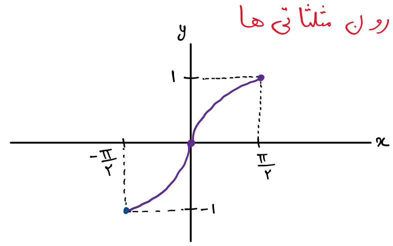
$$\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{7\pi}{12}=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{-1}{2}\left[-\cos\frac{\pi}{3}-0\right]=\frac{1}{4}$$

وارون مثلثاتی ها

۱)





$f(x) = \sin x$

$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

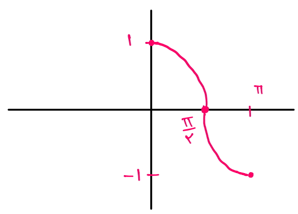
$R_f = [-1, 1]$

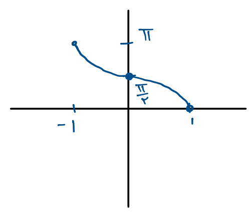
$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$

$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$

$R_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

۲)





$f(x) = \cos x$

$D_f = [0, \pi]$

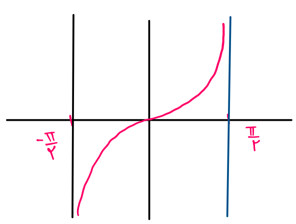
$R_f = [-1, 1]$

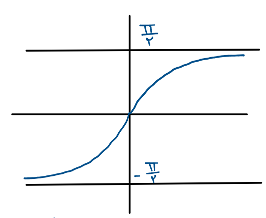
$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$

$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$

$R_{f^{-1}} = [0, \pi]$

۳)





$f(x) = \tan x$

$D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

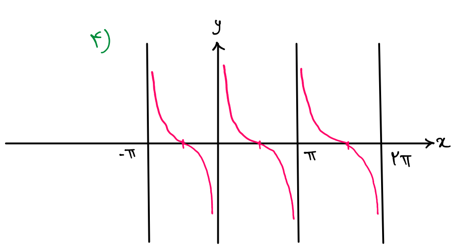
$R_f = (-\infty, +\infty)$

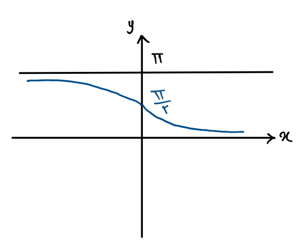
$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$

$R_{f^{-1}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

۴)





$f(x) = \cot x$

$D_f = (0, \pi)$

$f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$

$f(x) = \cot x$ | $f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$

$D_f = (0, \pi)$ | $D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$

$R_f = (-\infty, +\infty)$ | $R_{f^{-1}} = (0, \pi)$

حل مثال

۱) نمودار تابع $f(x) = \sin(\sin^{-1} x)$ را در دامنه‌اش رسم کنید.

۲) مقدار $\sin^{-1}(\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{6})$ کدام است. ۱) $-\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

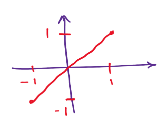
۳) حاصل $3\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) + 4\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ چقدر است؟

۴) مجموع جوابهای معادله $\tan^{-1}2x - \cot x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

1) $f(x) = \sin x(\sin^{-1} x) = x \longrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ D_f = [-1, 1] \end{cases}$

$f \circ f^{-1} = x$ یا $f^{-1} \circ f = x$



۲) $\sin^{-1}(\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{6}) = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \alpha \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

کمان α باید ۱) بین $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ باشد. ۲) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

۳) $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \alpha \longrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \beta \longrightarrow \cos\beta = -\frac{1}{2}$, $0 \leq \beta \leq \pi \Longrightarrow \beta = \frac{2\pi}{3}$

$\rightsquigarrow 3(\frac{2\pi}{3}) + 4(\frac{\pi}{4}) = 3\pi$

۴) از طرفین $\tan$ می‌گیریم : $\tan(\underbrace{\tan^{-1}2x}_{\alpha} - \underbrace{\cot^{-1}x}_{\beta}) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\Longrightarrow \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan(\tan^{-1}2x) - \tan(\cot^{-1}x)}{1 + \tan(\tan^{-1}2x)\tan(\cot^{-1}x)} = 1$$

$= \dfrac{2x - \frac{1}{x}}{1 - 2x(\frac{1}{x})} = 1 \longrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \longrightarrow$ مجموع ریشه‌ها $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2}$