آموزش انتگرال

مدرس : امین وحدت

Instagram : aminvahdatp6

Website : aminvahdatp6.ir

Yotube channel : youtube.com/@aminvahdat_p6

انتگرال نامعین (پادمشتق) (ضدمشتق)

هدف از عمل انتگرال گیری این است که با معلوم بودن مشتق یک تابع، ضابطه آنرا تعیین نماییم. پس انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری است.

$$y = F(x) + c \xrightarrow{\text{مشتق}} y = f(x)$$

انتگرال گیری (ضدمشتق)

تعریف: تابع $y = F(x) + c$ را تابع اولیه $y = f(x)$ گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \rightarrow dF(x) = f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x)}$$

قضیه بنیادین انتگرال

$\int$: نماد انتگرال گیری $f(x)$: تابع انتگرالیده

نکته: به تابعی که زیر انتگرال قرار گرفته باشد را، تابع انتگرالیده گوییم.

نکته: c یک عدد ثابت است که ثابت انتگرال گیری نامیده می شود.

اگر F و G ضدمشتق تابع f بر بازه I باشند آنگاه: $G(x) = F(x) + c$ یعنی تفاوت F و G در یک عدد ثابت c است.

$$F(x) + c \begin{cases} \xrightarrow{c = c_1} y_1 = F(x) + c_1 \\ \xrightarrow{c = c_2} y_2 = F(x) + c_2 \end{cases}$$

اختلاف ضد مشتق های تابع فقط یک عدد ثابت است.

مثال)
$$y_1 = x^2 + 2 \longrightarrow y_1' = 2x$$
$$y_2 = x^2 - 2 \longrightarrow y_2' = 2x$$

درک بیشتر مفهوم انتگرال گیری.

$$y_1 = x+5 \longrightarrow y_1' = 1 \longrightarrow \frac{dy_1}{dx} = 1$$

$$y_2 = x-3 \longrightarrow y_2' = 1 \longrightarrow \frac{dy_2}{dx} = 1$$

$$y_1 = \int 1\, dx = x + c_1$$

$$y_2 = \int 1\, dx = x + c_2$$

چون تحت عمل انتگرال گیری نمیتوان c_1 و c_2 را تشخیص داد، برای همین یک عدد ثابت c را می گذاریم که حالا می تواند هر عددی باشد حتی صفر. چون در مشتق گیری، مشتق عدد ثابت صفراست.

$$y_1 = x^3 \longrightarrow y_1' = 3x^2$$
$$y_2 = x^3 - 2 \longrightarrow y_2' = 3x^2$$
$$y_3 = x^3 + 2 \longrightarrow y_3' = 3x^2$$

$$\int 2x\, dt = 2xt + c$$

$$\int 2x\, dx = x^2 + c$$

dt و dx شناسه (دیفرانسیل) انتگرال هستند که می گویند نسبت به چه چیز انتگرال بگیریم.

نکته: بی شمار تابع به فرم $F(x)+c$ به عنوان تابع اولیه $f(x)$ وجود دارد که همگی آنها در یک مقدار ثابت اختلاف دارند.

مشتق انتگرال یک تابع برابر خود تابع می باشد.

$$\int F'(x)\, dx = F(x) \quad \text{یا} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

آزاد ریاضی - ۷۹) اگر $f(x) = \int \sqrt{x \sin x}\, dx$ باشد، مشتق تابع $(f'(x))^2$ کدام است؟

۱) $x \sin x$

۲) $x^2 \sin^2 x$

۳) $\sin x + x\cos x$ ✓

۴) $x\cos x + 1$

$$f'(x) = \sqrt{x \sin x} \longrightarrow \left(\sqrt{x\sin x}\right)^2 = x \sin x$$

$$\frac{d}{dx}(x \sin x) = \sin x + x \sin x$$

مشتق ضرب $(u.v)' = u'v + v'u$

یادآوری از مشتق ها

۱) $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$

۲) $d(c) = 0$ c: عددی ثابت

۳) $d(u+v) = du + dv = u'dx + v'dx$

۴) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

۵) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

۶) $d(u^n) = nu^{n-1}\,du = nu'u^{n-1}\,dx$

۷) $d(u.v) = v\,du + u\,dv$

۸) $d(\sqrt[n]{u}) = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۹) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

۱۰) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

۱۱) $\frac{d}{dx}\tan x = 1+\tan^2 x$

۱۲) $\frac{d}{dx}\cot x = -(1+\cot^2 x)$

فرمولهای مقدماتی

۱) $\int k\,dx = kx + c$

۲) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

۳) $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

۴) $\int (f \pm g)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

۵) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

۶) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

۷) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

۸) $\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + c$

۹) $\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + c$

۱۰) $\int (1+\tan^2(ax))\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax) + c$

۱۱) $\int (1+\cot^2(ax))\,dx = \frac{-1}{a}\cot(ax) + c$

۱۲) $\int f(x)\,dx = F(x) \Rightarrow \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$

۱۳) $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$

۱۴) $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$

1) $\int 3\,dx = 3\int dx = 3x + c$

2) $\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3 \times \frac{x^2}{2} + c$

3) $\int (3x^2+6x)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int 6x\,dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + c = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + c$

4) $\int (1+\tan^2(3x))\,dx = \frac{1}{a}\tan(3x) + c$

5) $\int \sin(7x)\,dx = \frac{-1}{7}\cos(7x) + c$

6) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

7) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{-1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$

روش های انتگرال گیری

1) $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

2) $\begin{cases} y = f(u) \rightarrow u = g(x) \rightarrow y' = u' f'(x) \\ y = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x) f'(g(x)) \end{cases} \rightarrow y = \int g'(x) f'(g(x))\,dx$

این روش حل بسیاری
از انتگرال ها است .

$\longrightarrow \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$u =$ تابعی از x

$du = u'\,dx$

$\rightsquigarrow \int u' u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

به قانون ۲ می گوییم قاعده زنجیری
برای انتگرال گیری

حل مثال

$$\int \frac{dx}{(2x-5)^3} = \int (2x-5)^{-3}\,dx = \frac{(2x-5)^{-3+1}}{2(-3+1)} = \frac{(2x-5)^{-2}}{-4} = \frac{-1}{4(2x-5)^2} + c$$

$$\int \sqrt{3x-1}\,dx = \int (3x-1)^{+\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(3x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{3\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{(3x-1)^{\frac{3}{2}}}{3\times\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{(3x-1)^3}}{9} + c$$

$$= \frac{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}{9} + c$$

$$\int (x^4-1)^2 \cdot 4x^3\,dx \xrightarrow[\text{طبق قانون ۲}]{\text{تغییر متغیر}} u = x^4-1 \Rightarrow du = 4x^3\,dx$$

$$\rightarrow \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + c \xrightarrow{u = x^4-1} \frac{1}{3}(x^4-1)^3 + c$$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx \quad \begin{cases} u = x-1 \rightarrow du = dx \\ x = u+1 \end{cases} \Longrightarrow \int (u+1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int \left(u\sqrt{u} + \sqrt{u}\right) du = \int u\sqrt{u}\,du + \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{3}{2}}\,du + \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c = \frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + c$$

$$\int x \sin x^2\, f'(\cos x^2)\,dx \longrightarrow u = \cos x^2 \longrightarrow du = -2x\sin x^2\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int -2x\sin x^2\, f'(\cos x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int f'(u)\,du = -\frac{1}{2}f(u) + c = -\frac{1}{2}f(\cos x^2) + c$$

$$\int (1+\tan^2 x)(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}\,dx \longrightarrow u = 1+\tan x \longrightarrow du = (1+\tan^2 x)\,dx$$

$$\longrightarrow \int u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1+\tan x} + c$$

اگر مشتق تابع $f(x^2)$ برابر $\frac{۲}{x^۳}$ باشد. $f(x)$ را بیابید. ($f(1)=0$ ، $x\neq 0$)

$$\big(\underbrace{f(x^2)}_{g(x)}\big)' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow 2x f'(x^2) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(x^2) = \frac{2}{2x\,x^3} = \frac{1}{x^4} = \frac{1}{(x^2)^2} = f'(x^2)$$

$$f'(x^2) = \frac{1}{(x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{-1}{x} + c$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) = -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{-1}{x} + 1}$$

(سراسری ریاضی ۷۲) اگر $F(x)=\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ باشد. آنگاه حاصل $F(\frac{\pi}{3})-F(0)$ کدام است.

۱) $2\sqrt{2}-2$ ✓ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $2\sqrt{2}-1$

$$F(x)=\int \frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}} x}\,dx = \int \sin x \times \cos^{-1} x \times \cos^{-\frac{1}{2}} x\,dx = \int \sin x \times \cos^{-\frac{3}{2}} x\,dx = \begin{cases} u=\cos x \\ du = -\sin x\,dx \end{cases}$$

$$\longrightarrow F(x) = -\int -\sin x \cdot \cos^{-\frac{3}{2}} x\,dx = -\int u^{-\frac{3}{2}}\,du = -\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = 2u^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{u}} + c = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + c \Rightarrow F(\frac{\pi}{3}) - F(0) = \frac{2}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}} - \frac{2}{\sqrt{\cos(0)}} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 2$$

$$= \boxed{2\sqrt{2}-2}$$

۳) $\int \sin u\, du = \int u' \sin u\, dx = -\cos x + c$

۴) $\int \cos u\, du = \int u' \cos u\, du = \sin u + c$

۵) $\int (1+\tan^{۲} u)\, du = \int u'(1+\tan^{۲} u)\, dx = \tan u + c$

۶) $\int (1+\cot^{۲} u\, du) = \int u'(1+\cot^{۲} u)\, dx = -\cot u + c$

۷) $\int \sin x \cos^{n} x\, dx = \dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1} + c$

۸) $\int \cos x \sin^{n} x\, dx = \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1} + c$

۹) $\int (1+\tan^{۲} x) \tan^{n} x\, dx = \dfrac{\tan^{n+1} x}{n+1} + c$

۱۰) $\int (1+\cot^{۲} x) \cot^{n} x\, dx = -\dfrac{\cot^{n+1}}{n+1} + c$

مثال ها

۱) $\int x \sin(x^{۲})\, dx = \rightarrow u = x^{۲} \rightarrow du = ۲x\, dx \rightarrow \frac{1}{۲} \int ۲x \sin(x^{۲})\, dx$

$= \frac{1}{۲} \times (-\cos(x^{۲})) + c = -\frac{1}{۲} \cos(x^{۲}) + c$

۲) $\int x^{-\frac{1}{۲}} \cos(\sqrt{x})\, dx = \rightarrow u = \sqrt{x} \rightarrow du = \dfrac{1}{۲\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{۲} x^{-\frac{1}{۲}}\, dx$

$\rightarrow ۲ \int \frac{1}{۲} x^{-\frac{1}{۲}} \cos(\sqrt{x})\, dx = ۲ \sin(\sqrt{x}) + c$

۳) $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt{۲+\cos x}}\, dx = \rightarrow u = ۲+\cos x \rightarrow du = -\sin x\, dx$

$\int \sin x (۲+\cos x)^{-\frac{1}{۲}}\, dx = -\int -\sin x (۲+\cos x)^{-\frac{1}{۲}}\, dx = -\int u^{-\frac{1}{۲}}\, du = -۲\sqrt{u} + c = -۲\sqrt{۲+\cos x} + c$

11) $\int \sin^{2n+1} x\, dx$ یا $\int \cos^{2n+1} x\, dx$ برای انتگرال گیری از توان های فرد سینوس یا کسینوس

از اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ استفاده می کنیم.

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \sin^2 x\, dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\, dx$$

$$\int(\sin x - \sin x\cos^2 x)\, dx = \int \sin x\, dx - \underbrace{\int \sin x \cos^2 x\, dx}_{u=\cos x \rightarrow du=-\sin x\, dx} = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)\, dx =$$

$$\int \cos x\, dx - \int \cos x \sin^2 x\, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

12) $\int \sin^{2n} x\, dx$ یا $\int \cos^{2n} x\, dx$ برای انتگرال گیری از توان های زوج سینوس یا کسینوس از روابط

نصف کمان های مثلثاتی استفاده می کنیم.

$$* \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$* \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$* \quad \tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$* \quad \cot^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$$

$$\left(\cos^2(n\alpha)\right)^m = \left(\frac{1}{2}(1+\cos(2n\alpha))\right)^m$$

$$\left(\sin^2(n\alpha)\right)^m = \left(\frac{1}{2}(1-\cos(2n\alpha))\right)^m$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \int \cos^2 2x\, dx\right)$$

$$\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$\int(\sin^6x+\cos^6x)\,dx=$$

$$\sin^6x+\cos^6x=1-3\sin^2x\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{8}(1-\cos4x)$$

اثبات : $\sin^6x+\cos^6x=1-3\sin^2x\cos^2x\xrightarrow{\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin2x}1-3\left(\frac{1}{2}\sin2x\right)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$$\xrightarrow{\sin^2 2x=\frac{1}{2}(1-\cos4x)}1-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(1-\cos4x)\right)=1-\frac{3}{8}(1-\cos4x)=1-\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos x\right)$$

$$1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos4x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4x$$

$$\rightarrow\int\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4x\right)dx=\int\frac{5}{8}dx+\frac{3}{8}\int\cos4x\,dx=\boxed{\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin4x+c}$$

13) $\int\sin^n x\cos^m x\,dx$ یا $\int\cos^n x\sin^m x\,dx$

حداقل یکی از m یا n فرد باشند. از اتحاد $\sin^2x+\cos^2x=1$ استفاده کرده و از تغییر متغیر مناسبی کمک می‌گیریم برای حل انتگرال.

$$\int\sin^2x\cos^3x\,dx=\int\sin^2x\cos x(1-\sin^2x)\,dx=$$

$$u=\sin x\rightarrow du=\cos x\,dx\Rightarrow\int u^2(1-u^2)\,du=\int(u^2-u^4)\,du=\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+c$$

$$\rightarrow\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+c$$

14) $\int\sin^n x\cos^m x\,dx$ یا $\int\cos^n x\sin^m x\,dx$

اگر m و n هر دو زوج باشند ($m,n\in E$) از روابط نصف کمان و تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\int\sin^2x\cos^4x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos2x)\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\int(1-\cos2x)(1+\cos2x)^2dx$$

$$\frac{1}{8}\int(1-\cos2x)(1+2\cos2x+\cos^2 2x)\,dx=\frac{1}{8}\int(1+\underbrace{2\cos2x-\cos2x}_{\cos2x}+\underbrace{\cos^2 2x-2\cos^2 2x}_{-\cos^2 2x}-\cos^3 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\underbrace{x-\frac{1}{2}x}_{\frac{1}{2}x}+\underbrace{\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\sin2x}_{0}-\frac{1}{8}\sin4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+c=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$$

۱۵) $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ ۱۶) $\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$

۱۷) $\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ ۱۸) $\int \cos(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$

برای محاسبه این نوع انتگرال ها ، از فرمول های ضرب به جمع استفاده می کنیم.

$$2\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x$$

$$2\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = -\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x$$

$$2\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x$$

$$2\cos(\alpha x)\sin(\beta x) = \sin(\alpha+\beta)x - \sin(\alpha-\beta)x$$

$$\int \sin(5x)\cos(3x)\,dx = \int\left(\sin(5+3)x + \sin(5-3)x\right)dx = \int \sin 8x\,dx + \int \sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

۱۹) $\int \tan^{2n} x\,dx$ یا $\int \cot^{2n} x\,dx$

برای محاسبه انتگرال توان های زوج تانژانت وکتانژانت از درجه عبارت زیر انتگرال ۲ تا ۲ تا کم کرده و تانژانت آن را به عبارت اضافه و کم می کنیم تا به توان صفر برسیم. سپس محاسبه می کنیم.

مثال) اگر $F(x)=\int(\cot^4 x - 1)\,dx$ و $F(\frac{\pi}{4})=0$ ، c کدام است.

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

$$\int \cot^4 x\,dx - \int dx = \int(\cot^4 x + \cot^2 x - \cot^2 x - 1 + 1)\,dx - \int dx$$

$$= \int \cot^2 x(1+\cot^2 x)\,dx - \int(1+\cot^2 x)\,dx + \int dx - \int dx + c$$

$$\rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + c \rightarrow F(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 + c = 0 \rightarrow c = -\frac{2}{3}$$

$$\int(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)\,d\alpha=\int\tan^2\alpha\,d\alpha+\int\cot^2\alpha\,d\alpha=\int(\tan^2\alpha+1-1)\,d\alpha+\int(\cot^2\alpha+1-1)\,d\alpha$$

$$=\int(1+\tan^2\alpha)\,d\alpha-\int d\alpha+\int(1+\cot^2\alpha)\,d\alpha-\int d\alpha=\tan\alpha-\alpha-\cot\alpha-\alpha+=\tan\alpha-\cot\alpha-2\alpha+c$$

۲۰) $\int\frac{dx}{\sin^{2n}x}$ یا $\int\frac{dx}{\cos^{2n}x}$

برای محاسبه اینگونه انتگرال ها ، از روابط اتحادهای مثلثاتی استفاده می کنیم .

$$\begin{cases}1+\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}\\[2mm] 1+\cot^2x=\dfrac{1}{\sin^2x}\end{cases}$$

مثال) تابع اولیه $\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}$ را بیابید .

$$\int\left(\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}\right)dx=\int(1+\cot^2x)+\int(1+\sin^2x)\,dx$$

$$=\tan x-\cot x+c$$

۲۱) $\int\sec^2u\,du=\int u'\sec^2u\,dx=\tan u+c$

۲۲) $\int\csc^2u\,du=\int u'\csc^2u\,dx=-\cot u+c$

۲۳) $\int u'\sec u\tan u\,dx=\sec u+c$

۲۴) $\int u'\csc u\cot u\,dx=\csc u+c$

$$\int x^2\sec(x^3)\,dx=\quad u=x^3\Rightarrow du=3x^2dx\rightarrow\frac{1}{3}\int 3x^2\sec(x^3)\,dx=\frac{1}{3}\tan(x^3)+c$$

$$\int\frac{\sec(\sqrt{x})\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\sec(\sqrt{x})\tan(\sqrt{x})\,dx\Rightarrow u=\sqrt{x}\rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec(\sqrt{x})\tan(\sqrt{x})\,dx=2\sec(\sqrt{x})+c$$

۲۵) $\int \sec^n x \cdot \tan^m x \, dx$ و $\int \csc^n x \cdot \cot^m x \, dx$

در حالتی که n زوج باشد عامل $\sec x$ یا $\csc x$ را جدا کرده و سایر عبارات را برحسب $\tan x$ یا $\cot x$ مرتب می کنیم و با در نظر گرفتن $u = \tan x$ یا $u = \cot x$ حل می کنیم.

نکته: $\sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$, $\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{0+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \sec x \cdot \tan x$, $1+\tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\tan^2 x = 1 - \sec^2 x$

$$\int \sec^4 x \cdot \tan^5 x \, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^5 x \, dx$$

$$= \int (1+\tan^2 x) \tan^5 x \cdot \sec^2 x \, dx \Rightarrow u = \tan x \rightarrow du = (1+\tan^2 x)dx = \sec^2 x \, dx \rightarrow \int (1+u^2) u^5 \, du = \int (u^5 + u^7) \, du$$

$$= \frac{1}{6} u^6 + \frac{1}{8} u^8 + c = \frac{1}{6} \tan^6 x + \frac{1}{8} \tan^8 x + c$$

انتگرال وارون های مثلثاتی :

$$1)\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c \qquad 2)\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1}x + c$$

$$3)\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c \qquad 4)\int \frac{-dx}{1+x^2} = \cot^{-1}x + c$$

$$5)\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}u + c \qquad 6)\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$7)\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u + c \qquad 8)\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$9)\int \frac{dx}{a^2x^2+k^2} = \frac{1}{ka}\tan\left(\frac{a}{k}\right) + c \qquad 10)\int \frac{dx}{x^2+k^2} = \frac{1}{k}\tan^{-1}\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

تابع اولیه تابع $f(x) = \frac{3x^2+6x+3}{x^2+2x+2}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی - ۷۲)

1) $3x+3\tan^{-1}(x+1)+c$ 　　 3) $3x-3\tan x+c$

2) $3x-3\tan^{-1}(x+1)+c$ ✓ 　　 4) $3x+3\tan^{-1}x+c$

$$f(x) = \frac{3(x^2+2x+2)-3}{x^2+2x+2}$$

$$= 3 - \frac{3}{x^2+2x+2} \longrightarrow \int 3dx - 3\int \frac{dx}{1+(x+1)^2} = 3x - 3\tan^{-1}(1+x) + c$$

حاصل $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی - ۷۵)

1) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{x}}{2}+c$ 　　 2) $2\tan^{-1}\sqrt{x}+c$ ✓ 　　 3) $\tan^{-1}\sqrt{x}+c$ 　　 4) $\tan^{-1}2\sqrt{x}+c$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}dx}{1+(\sqrt{x})^2} \Rightarrow u=\sqrt{x} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \rightarrow 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= 2\tan^{-1}u + c = 2\tan^{-1}\sqrt{x} + c$$

انتگرال توابع نمایی و لگاریتمی

1) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

3) $\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$

4) $\int e^{u}\, du = \int u' e^{u}\, dx = e^{u} + c$

5) $\int a^{x}\, dx = \frac{1}{\ln a}\, a^{x} + c$

6) $\int \frac{a^{u}}{\ln a} + c$

$$\int \frac{2x e^{x}}{1+e^{x^2}}\, dx \longrightarrow u = 1 + e^{x} \longrightarrow du = 2x e^{x^2} \longrightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|e^{x^2}+1| + c$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} \longrightarrow \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx \Rightarrow u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \longrightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow u = \sqrt{x} \longrightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \longrightarrow 2\int e^{u}\, du = 2e^{u} + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

انتگرال توابع هیپربولیک

1) $\int \cosh u\, du = \sinh u + c$

2) $\int \sinh u\, du = \cosh u + c$

3) $\int \tanh u\, du = \ln|\cosh u| + c$

4) $\int \coth u\, du = \ln|\sinh u| + c$

یادآوری:

1) $\sinh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

2) $\cosh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

3) $\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

4) $\coth x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

انتگرال وارون هیپربولیک

1) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

2) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c \quad (a>0)$

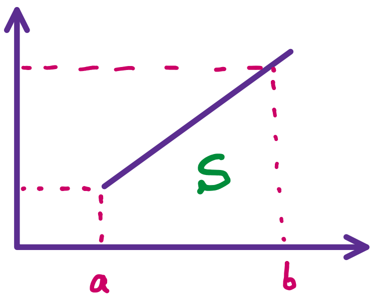
3) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c = \begin{cases} -\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) \text{ ،} & (|u|<|a|) \\ -\frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) \text{ ،} & (|u|>|a|) \end{cases}$

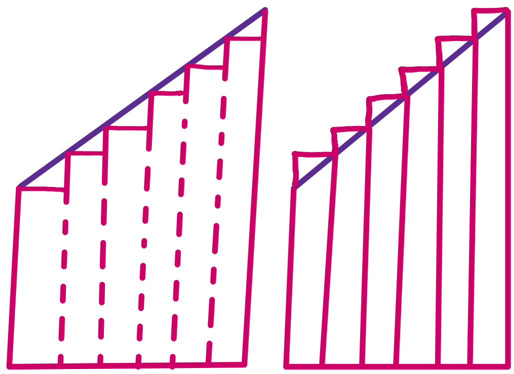
مثال) حاصل انتگرال $I=\int \frac{dx}{\sinh x}$ را بدست آورید.

$$I=\int \frac{dx}{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^{x}-e^{-x}} \xrightarrow[\times e^{x}]{\text{روش کار:}} 2\int \frac{e^{x}dx}{e^{2x}-1}$$

$$u=e^{x} \to du=e^{x}dx \ ,\ u^{2}=e^{2x} \to \int \frac{2\,du}{u^{2}-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = -\tanh^{-1}x + c$$

انتگرال معین: قبلاً انتگرال نامعین یا پادمشتق را معرفی کردیم. در این قسمت می خواهیم درباره مساحت زیرنمودار که محدود بین دو خط $x=a$ و $x=b$ را محاسبه بکنیم. یک روش یافتن مساحت، محاسبه مجموع تعداد زیادی مساحت مشخص است که این مسئله یکی از مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می باشد.





تقریب اضافی و نقصانی:

مساحت محصور به نمودار f و محور x ها را در فاصله $[a,b]$ را می خواهیم تعیین بکنیم. برای محاسبه مساحت زیر نمودار f، ناحیه مورد نظر را به تعدادی مستطیل محیطی و محاطی افراز می کنیم.

مجموع مساحت های مستطیل های محیطی > S > مجموع مساحت های مستطیل های محاطی

تعریف:

۱) تقریب نقصانی S = مجموع مساحت های مستطیل های محاطی (L_n)

۲) تقریب اضافی S = مجموع مساحت های مستطیل های محیطی (U_n)

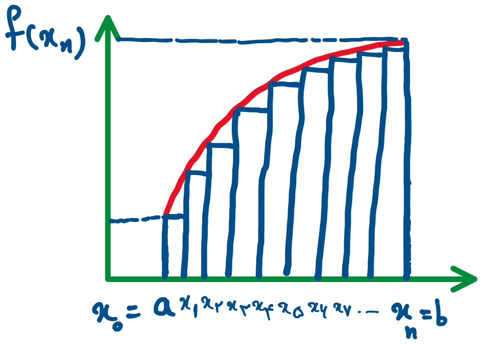
$$L_n < S < U_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = S$$

n تعداد مستطیل ها است. یعنی وقتی n خیلی زیاد شود مقدار L_n و U_n که دنباله ای ساختیم از تقریب ها به ازای هر مقدار بیشتر، به S نزدیک تر شوند و همگرا باشند.

باز $[a,b]$ را بطور منظم افراز می کنم. اگر تعداد مستطیل ها n تا باشد

و طول هر مستطیل $\Delta x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots$ باشد :



$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

$x_0 = a$

$x_1 = x_0 + \Delta x = a + \Delta x$

$x_2 = x_0 + 2\Delta x = a + 2\Delta x$

$x_3 = x_0 + 3\Delta x = a + 3\Delta x$

$\vdots$

$x_i = x_0 + i\Delta x \longrightarrow$ یک تصاعد حسابی هست $\longrightarrow x_i = a + i\Delta x$

مساحت هر مستطیل : $S = f(x_i) \cdot \Delta x$

مساحت تمام مستطیل ها : $S_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$

مجموع مساحت های مستطیل های محاطی $= L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$ $f(x_{i-1})$: Min مطلق هر بازه

مجموع مساحت های مستطیل های محیطی $= U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ $f(x_i)$: Max مطلق هر بازه

نکته

نزولی f : $f(x_{i-1}) < f(x) \Rightarrow L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$

نزولی f : $f(x_{i-1}) > f(x) \Rightarrow U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$

اگر $f(t_i)$، Min مطلق f در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ باشد آنگاه $L_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ ریمان پایین f در بازه $[a,b]$ است.

اگر $f(t_i)$، Max مطلق f در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ باشد آنگاه $U_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ ریمان بالای f در بازه $[a,b]$ است.

پس بطور کلی میتوان نوشت :

$f(m_i)$: ریمان پایین f در بازه i ام $L_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i) \cdot \Delta x$

$f(M_i)$: ریمان بالای f در بازه i ام $U_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$

برای تابع f با ضابطه $f(x)=x^2$ در بازه $[1,4]$ و $n=180$ مجموع ریمان بالا چقدر از مجموع ریمان پایین بیشتر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ✓ ۴) $\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2 \to f'(x)=2x \xrightarrow{x>0} f'(x)>0$ f صعودی است

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{180} = \frac{1}{60}$$

f در بازه $[1,4]$ صعودی است : $L_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

$$U_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$x_i = a+i\Delta x = 1+\frac{i}{60}$ و $x_{i-1} = a(i-1)\Delta x = 1+\frac{i-1}{60}$

$f(x_i)=(1+\frac{i}{60})^2$, $f(x_{i-1})=(1+\frac{(i-1)}{60})^2$

$$U_n-L_n=\frac{1}{60}\left(\sum_{i=1}^{180}\left[(1+\frac{i}{60})^2-(1+\frac{i-1}{60})^2\right]\right)$$

$$U_n-L_n=\frac{1}{60}\left(\sum_{i=1}^{180}\left[(1+\frac{2i}{60}+\frac{i^2}{60^2})-(1+\frac{2i}{60}-\frac{2}{60}+\frac{i^2-2i+1}{60^2})\right]\right)=\frac{1}{3600}\left(\sum_{i=1}^{180}2+\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{180}i-\sum_{i=1}^{180}\frac{1}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{3600}\left(2\times180+\frac{1}{30}\times\frac{180(180+1)}{2}-\frac{1}{60}\times180\right)=\frac{1}{3600}(360+3\times180-3)=\frac{360+3\times180}{3600}=\frac{5\times180}{180\times20}$$

$$=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

نکته: اگر تابع f در بازه داده شده یکنوا باشد، این نوع مسائل را می توان با فرمول زیر به راحتی بررسی نمود:

$$\boxed{U_n-L_n=(f(b)-f(a))\Delta x}$$

برای مثال بالا : $f'(x)=2x$ و $x\in[1,4] \Rightarrow f'>0 \Rightarrow$ f صعودی

$$U_n-L_n=\Delta x(f(a)-f(b))=\frac{b-a}{n}(f(a)-f(b))=\frac{4-1}{180}(16-1)=\frac{3\times15}{180}=\frac{1}{4}$$

مجموع ریمان بالا و پایین تابع $f(x)=x+1$ را در بازه $[1,3]$ بیابید. $(n=6)$

$$\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

x	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3
$f(x)$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$	4

$$U_n = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{3}+\frac{8}{3}+\frac{9}{3}+\frac{10}{3}+\frac{11}{3}+\frac{12}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{57}{3}\right) = \frac{57}{9}$$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{3}+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}+\frac{9}{3}+\frac{10}{3}+\frac{11}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{51}{3}\right) = \frac{51}{3}$$

$$U_n + L_n = \frac{108}{3} = 36$$

$$f(x)=x+1 \longrightarrow x+1 \in [1,3] \text{ صعودی } \Longrightarrow \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right) = U_n - L_n = \frac{2}{3}(4-2) = \frac{4}{3}$$

ویژگی های انتگرال معین

۱) $\int_a^b K\,dx = K(b-a) \qquad K\in\mathbb{R}$

۲) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)\,dx$

۳) $\int_a^b K f(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$

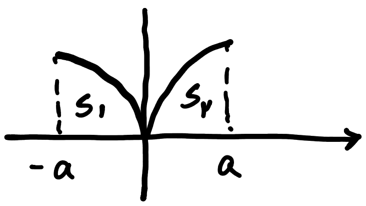
۴) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a<c<b)$

۵) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

۶) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

اگر f در بازه $[-a,a]$ زوج باشد آنگاه انتگرال :

۷) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

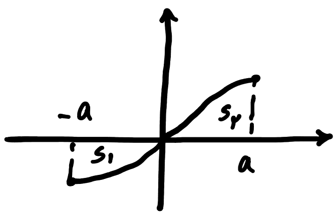


$S = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx = S_1$

چون در تابع زوج محور y ها متقارن است : $S = 2S_1$

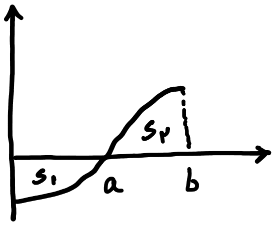
اگر تابع f در بازه $[-a,a]$ فرد و انتگرال پذیر باشد آنگاه :

۸) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -F(x) + F(x) = 0$

تعبیر هندسی انتگرال معین :



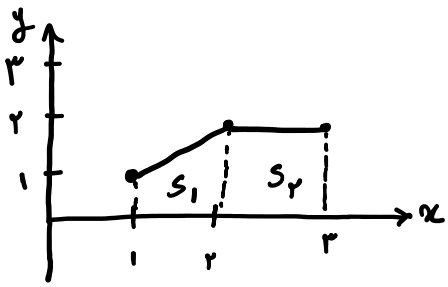
$$S_1 = \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^a f(x) + \int_a^b f(x)\,dx = S_1 + S_2$$

قرارداد
- S بالای محور xها باشد : $S>0$
- S پایین محور xها باشد : $S<0$

اگر تابع f با ضابطه زیر معروف باشد . $f(x)=\begin{cases} x : 1\le x\le 2 \\ 2 : 2<x\le 3 \end{cases}$ آنگاه $\int_1^3 f(x)dx$ کدام است ؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ✓

۳) 5 ۴) 3



$$S = S_1 + S_2 = \int_1^3 f(x)\,dx$$

$$S_1 = \left(\frac{1+2}{2}\right)\times 1 = \frac{3}{2}$$
$$S_2 = 2\times 1 = 2$$
$$\rightarrow S = 2+\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

روش دوم : $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 2\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 + 2(3-2) = \frac{7}{2}$

خواص ترتیبی انتگرال :

1) $\begin{cases} a\le x\le b \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ مساحت زیر نمودار مثبت است

2) $\begin{cases} a\le x\le b \\ f(x)\ge g(x) \end{cases} \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

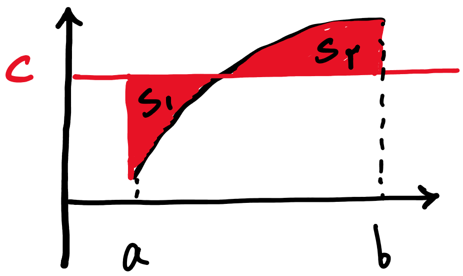
3) $\begin{cases} a\le x\le b \\ m\le f(x)\le M \end{cases} \longrightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$ ؛
M : Max مطلق f
m : min مطلق f

4) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b f(x)\,dx$

قضیه مقدار میانگین انتگرال ها: فرض کنیم تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. اگر m و M بترتیب Min مطلق و Max مطلق f روی بازه $[a,b]$ باشند آنگاه:

$$\exists c \in (a,b) ,\ a<c<b \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \sim m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

$$\bar{f}(x) = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ مقدار متوسط f در بازه $[a,b]$ است.



محل $x=c$ جایی است که: $S_1 = S_2$

و مقدار آن برابر مقدار میانگین تابع است

$$\boxed{f(c) = \bar{f}(x)}$$

مقدار متوسط تابع $f(x)=x^2$ در بازه $[1,4]$ را بدست آورید.

$$\bar{f}(x) = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(c) = \frac{1}{4-1}\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 = \frac{1}{6}(16-1) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

عدد حقیقی c در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال $\int_1^5 \frac{x^2-1}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ✓ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{3}$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{5-1}\int_1^5 \frac{x^2-1}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_1^5 1\,dx - \int_1^5 x^{-2}\,dx\right)$$

$$\frac{1}{4}\left((5-1) - \left(-\frac{1}{x}\right]_1^5\right) = \frac{1}{4}\left(4 + \left(\frac{1}{5}-1\right)\right) = \frac{1}{4}\left(4 - \frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{4}{5} = f(c) = \frac{c^2-1}{c^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{c^2} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{c^2} \rightarrow c = \pm\sqrt{5} \xrightarrow{c\in(1,5)} c = \sqrt{5}$$

قضایای بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال

قضیه ۱) اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و داشته باشیم: $a \leq x \leq b$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) \longrightarrow F'(x) = f(x)$$

این اولین قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال است که به مشتق انتگرال معروف است.

تعمیم:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(x) \longrightarrow F'(x) = v'(x)\,f(v(x)) - u'(x)\,f(u(x))$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

قضیه ۲) انتگرال معین را اینگونه محاسبه می کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

اگر $F(x) = \int_1^{\tan^{-1}x} \frac{dt}{1+t^2}$ مقدار $F'(1)$ چقدر است؟

۱) $16+\pi^2$ ۲) $\frac{8}{2+\frac{\pi^2}{8}}$ ✓

۳) $\frac{4}{16+\pi^2}$ ۴) π^2

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$F'(x) = u' f(u(x)) - v' f(v(x))$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{1+(\tan^{-1}x)^2} - 0 \Longrightarrow F'(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{16}} = \frac{1}{2+\frac{\pi^2}{8}}$$

روش های انتگرال گیری

انتگرال گیری جزء به جزء

$d(uv) = v.du + u dv \longrightarrow u dv = d(uv) - v du$

$$\Rightarrow \boxed{uv - \int v\,du = \int u\,dv}$$

دراین روش تابعی راکه مشتق آن ساده تراست را u در نظر گرفته و dv را طوری انتخاب می کنیم که بتوانیم v را راحت حساب بکنیم.

مثال) $\int x\cos x\,dx \longrightarrow \begin{cases} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \longrightarrow v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{cases}$

$$\longrightarrow \int x\cos x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

* درانتخاب u و dv باید دقت کنیم وبا حل مثال های بیشتر تجربه لازم راکسب کنیم. *

نکته: معمولاً توابعی مثل $\sin$ و $\cos$ و e^x و $\sinh x$ و $\cosh x$ را dv درنظر می گیریم و توابعی مثل $\log x$ و $\sin^{-1}x$ و چند جمله ای ها را u درنظر می گیریم. اما این تاکید همواره هم درست نیست و بستگی به سوال دارد اما دربیشتر موارد اینگونه کار مان راه می افتد.

حل مثال)

1) $\int xe^x\,dx \longrightarrow \begin{cases} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = e^x\,dx \longrightarrow v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

۲) $\int \ln x\,dx \longrightarrow \begin{cases} \ln x = u \longrightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{cases} \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\Rightarrow \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c$$

جدول انتگرال گیری

مشتق	انتگرال
$f(x)$	$g(x)$
$f'(x)$	$\int g(x) = G_1(x)$
$f''(x)$	$\int G_1(x) = G_2(x)$
$\vdots$	$\vdots$

تابع f و مشتق های آنرا در سمت چپ می نویسیم و ادامه می دهیم تا به صفر برسیم. (لزوما نیاز نیست به صفر برسیم همیشه). و در طرف راست تابع g را قرار داده و انتگرال های آنرا می نویسیم.

مثال) $\int x e^x dx$

$$\begin{cases} u = x = f(x) \\ dv = e^x dx = g(x) \end{cases}$$

مشتق	انتگرال
x	e^x
1	e^x
0	e^x

$$\Rightarrow \int x e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\int Ln x \, dx =$$

$$\begin{cases} u = Ln x = f(x) \\ dv = dx = g(x) \end{cases}$$

مشتق	انتگرال
$Ln x$	1
$\frac{1}{x}$	x
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2} x^2$
$\vdots$	

$$\int Ln x = Ln x - \frac{1}{2} x - \int \frac{1}{2} dx = Ln x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x + c$$

$$= Ln x - x + c$$

$$\int e^{5x} \cos 4x \, dx = I$$

$$\begin{cases} u = e^{5x} \\ dv = \cos 4x \, dx \end{cases}$$

مشتق	انتگرال
e^{5x}	$\cos 4x$
$5e^{5x}$	$\frac{1}{4} \sin 4x$
$25e^{25}$	$-\frac{1}{16} \cos 4x$
$\vdots$	

اگر مشتق سمت چپ به صفر نرسید، هر زمان که خواستیم می توانیم مشتق گیری را متوقف کنیم و حاصل را حساب کنیم اما آن موقع باید جملات سطر آخر دو ستون را درهم ضرب کنیم و انتگرال بگیریم از حاصل ضرب آنها.

$$\int e^{5x} \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x + \frac{1}{16} e^{5x} \cos 4x - \frac{25}{16} \underbrace{\int e^{5x} \cos 4x \, dx}_{I} = I \Rightarrow I + \frac{25}{16} I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x + \frac{5}{16} e^{5x} \cos 4x$$

$$\rightarrow \frac{41}{16} I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x + \frac{5}{16} e^{5x} \cos 4x$$

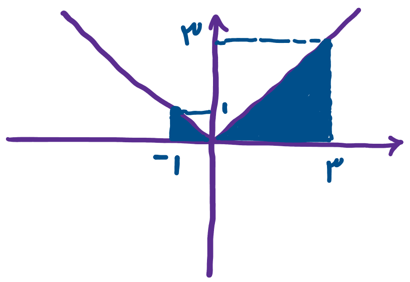
$$\rightarrow I = \frac{4}{41} e^{5x} \sin 4x + \frac{5}{41} e^{5x} \cos 4x$$

محاسبه $\int_a^b |f(x)|dx$: اگر تابع در $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه $|f|$ نیز انتگرال پذیر است و برای محاسبه $\int_a^b |f(x)|dx$ ابتدا ریشه های $f(x)=0$ را تعیین می کنیم و به کمک آنها بازه $[a,b]$ را افراز می کنیم و در هر زیربازه علامت f را تعیین می کنیم و پس از آن حاصل $|f|$ را یافته و انتگرال را محاسبه می کنیم.

$\int_{-1}^{3}|x|\,dx \qquad |x|=0 \to x=0$

	$x=0$	
$-$	0	$+$

$$\int_{-1}^{0}|x|dx+\int_{0}^{3}|x|dx=-\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_{0}^{3}x\,dx=-\left(\frac12x^2\right]_{-1}^{0}+\frac12x^2\Big]_{0}^{3}=-\frac12(0-1)+\frac12(9-0)=\frac12+\frac92=\frac{10}{2}=5$$



$$-S_1=\frac{-1\times1}{2}=\frac{-1}{2}$$
$$S_1=\frac12$$
$$S_2=\frac{3\times3}{2}=\frac92$$
$$\to S_T=S_1+S_2=\frac12+\frac92=\frac{10}{2}=5$$

$$\int_{0}^{2}x|x-1|dx=\int_{0}^{1}-x(x-1)dx+\int_{1}^{2}x(x-1)dx=\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx=-\frac13x^3+\frac12x^2\Big]_{0}^{1}+\frac13x^3-\frac12x^2\Big]_{1}^{2}$$

$x-1=0$

	$x=1$	
$-$	0	$+$

$$=-\frac13(1)+\frac12(1)+\frac13(8-1)-\frac12(4-1)=1$$

محاسبه $\int_a^b [f(x)]dx$: برای محاسبه اینگونه انتگرال ها، بازه ها را جوری می شکنیم یا تفکیک می کنیم که عدد صحیح برای براکت بدست آید.

$$\int_{-1}^{3}[x]dx=\int_{-1}^{0}-1+\int_{0}^{1}0+\int_{1}^{2}1+\int_{2}^{3}2=-x\Big]_{-1}^{0}+0+x\Big]_{1}^{2}+2x\Big]_{2}^{3}=-(1)+(1)+2(1)=2$$

$[x]=-1 \qquad [x]=0 \qquad [x]=1 \qquad [x]=2$

مقدار $I=\int_0^2 x e^{x\lfloor x\rfloor}$ که در آن $\lfloor x\rfloor$ جزء صحیح x می باشد چقدر است؟ (عمران - سراسری ۸۹)

۱) e^2 ۲) $\frac12e^2$ ۳) $e^2+\frac12$ ✓ ۴) $\frac{e^x+1}{2}$

$$\int_{0}^{1}xe^{0}dx+\int_{1}^{2}xe^{x}dx=\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{2}xe^{x}dx=\frac12x^2\Big]_{0}^{1}+(x-1)e^x\Big]_{1}^{2}=\frac12+e^2$$

$\lfloor x\rfloor=0 \qquad \lfloor x\rfloor=1$

انتگرال به روش تجزیه کسرها : این روشی برای محاسبه انتگرال توابع گویا به کار می رود. توابع گویا توابعی کسری هستند که صورت و مخرج چند جمله ای است.

۱) اگر درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده تا درجه صورت از مخرج کمتر شود سپس مخرج را تا جای ممکن تجزیه می کنیم که در مخرج کسر فقط عبارت درجه اول یا دوم فاقد ریشه دوم ($\Delta<0$) باشد

۱) اگر در مخرج عبارت $(x-a)^n$ باشد :

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

۲) اگر در مخرج عبارت $(x^2+bx+c)^n$ وجود داشته باشد که (در ax^2+bx+c ، $\Delta<0$) در اینصورت :

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}+\frac{A_2x+B}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

مثال) $\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^3-1 \\ \hline -(x^4-x) & x \\ \hline x+1 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow x+\frac{x+1}{x^3-1} \quad \text{و} \quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\rightsquigarrow x+\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{x^2-x+1}{x^3-x} \qquad x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+2) \Rightarrow \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

محاسبه ضرایب کسرها در این روش : دو طرف تساوی در مخرج ضرب می کنیم تا مخرج کسر از بین برود و سپس ضرایب را استخراج می کنیم.

$$\frac{x^2-x+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

$$\times\, x^3-x \rightarrow x^2-x+1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

$$x^2-x+1=Ax^2-A+Bx^2+Bx+Cx^2-Cx=x^2(A+B+C)+x(B-C)-A \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=-1 \rightarrow C=B+1 \\ -A=1 \rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow A+B+C=-1+B+B+1=1 \rightarrow 2B=1 \rightsquigarrow B=\frac{1}{2} \text{ و } C=\frac{3}{2} \text{ و } A=-1$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx \Rightarrow x^2-4=(x-2)(x+2) \to \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\rightsquigarrow \times\; x^2-4 \Longrightarrow A(x+2)+B(x-2)=1 \to Ax+2A+Bx-2B=1 \to (A+B)x+2(A-B)=1$$

$$A+B=0 \to A=-B$$

$$2(A-B)=1 \to A-B=\frac{1}{2} \to -B-B=\frac{1}{2} \to -2B=\frac{1}{2} \to \boxed{B=-\frac{1}{4}\ ,\ A=\frac{1}{4}}$$

$$\to \int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1/4}{x-2}\,dx + \int \frac{-1/4}{x+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

حاصل $\int_{1/2}^{1} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$ برابر کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $\ln\frac{2}{5}$ ۲) $\ln\frac{4}{5}$ ✓ ۳) $\ln\frac{5}{4}$ ۴) $\ln\frac{5}{2}$

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2+1} \longrightarrow \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} \to \begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \to B=2 \end{cases}$$

$$\to \int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\ln x\Big]_{1/2}^{1} + \ln(x^2+1)\Big]_{1/2}^{1}$$

$$= \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\Big]_{1/2}^{1} = \ln 2 - \ln\frac{5}{2} = \ln\left(\frac{2}{\frac{5}{2}}\right) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

حاصل $I=\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$ را بدست آورید.

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\longrightarrow A(x^2+1)(x+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2=2x \Rightarrow$$

$$x^3(A+C)+x^2(A+B+D+2C)+x(A+C+2D)+A+B+D=2x$$

$$\begin{cases} A+C=0 \longrightarrow A=-C \\ A+B+2C+D=0 \xrightarrow{D=1\ ,\ A=-C\ ,\ C=B+1} -(B+1)+B+2(B+1)+1=0 \Rightarrow -1+2B+3=0 \rightarrow 2B=-2 \Rightarrow B=-1 \\ A+C+2D=2 \longrightarrow -C+C+2D=2 \Rightarrow D=1 \\ A+B+D=0 \xrightarrow[A=-C]{D=1} -C+B+1=0 \longrightarrow C=B+1 \end{cases}$$

$$A=0\ ,\ B=-1\ ,\ D=1\ ,\ C=0$$

$$I=\int\left(\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{-dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{x+1}+\tan^{-1}(x)+c$$